MCKAY CORRESPONDENCE.

Листок 1

(1) Если поверхность задана одним уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{C}^3$, точка (x_0, y_0, z_0) особая тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Найдите все особые точки поверхности, заданной в $\mathbb{C}P^3$ уравнением $x^2y^4 + z^3t^3 + x^5t = 0$.

(2) Пусть $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ - обратимое линейное отображение. Если $P(x, y)$ — многочлен, обозначим g^*P такой многочлен, что $g^*P(x, y) = P(g(x, y))$. Назовем многочлен $P(x, y)$ *инвариантным* относительно g, если $g^*P = P$, и *полуинвариантным*, если $g^*P = \mu P$ для какого-то $\mu \in \mathbb{C}$. Докажите, что если $P = P_1 + \ldots + P_n$, при этом P инвариантен относительно g, а $P_1, \ldots, P_n$ полуинвариантны и линейно независимы, то $P_1, \ldots, P_n$ инвариантны относительно g.

Замечание: при этом определении $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, а не $f^* \circ g^*$, т.е. если g — элемент группы, то отображения $P \mapsto g^*P$ не задают действия группы. Действие группы на $\mathbb{C}[x, y]$ можно задать формулой $g.P(x, y) = P(g^{-1}(x, y))$.

Многочлены, инвариантные относительно всех элементов некоторой группы, образуют алгебру (множество со сложением, умножением и умножением на скаляр; в данном случае это означает, что данное множество многочленов замкнуто относительно сложения, перемножения и умножения на комплексное число). Набор элементов алгебры называется *набором образующих*, если все остальные элементы алгебры получаются из них помощи трех операций, перечисленных выше (т.е. минимальная подалгебра, содержащая данный набор - это вся алгебра). Набор называется минимальным, если никакое его строгое подмножество не является набором образующих.

(3) Пусть Γ — циклическая группа, порожденная $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, где $\zeta^n = 1$.

(a) Какие мономы могут входить в многочлен, инвариантный относительно всех элементов Γ?

(b) Найдите какой-нибудь минимальный набор образующих для алгебры инвариантов Γ.

(4) Пусть Γ — группа, порожденная $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Какие мономы могут входить в многочлен, инвариантный относительно всех элементов Γ?

(b) Найдите какой-нибудь минимальный набор образующих для алгебры инвариантов Γ.