MCKAY CORRESPONDENCE.

Листок 3

Во всех задачах подразумевается, что если на пространстве $\mathbb{C}^n$ имеются координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, то при раздутии начала координат на исключительном дивизоре $E \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ координаты вводятся стандартным образом: $(X_1 : \ldots : X_n)$, где $x_i X_j = X_i x_j$ для всех i, j.

(1) Пусть C — кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $x^2+x^3+y^2=0$, а $\widetilde{C}$ — ее прообраз при раздутии начала координат в $\mathbb{C}^2$. Найдите все точки пересечения кривой $\widetilde{C}$ с исключительной прямой этого раздутия.

(2) Пусть C — кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $x^2+y^3=0$, а $\widetilde{C}$ — ее прообраз при раздутии начала координат в $\mathbb{C}^2$. Покажите, что $\widetilde{C}$ касается исключительной прямой.

(3) Пусть C — кривая в $\mathbb{C}^3$, заданная уравнениями
  (a) $(x, y, z) = (t + t^2, t + t^3, t + t^4)$;
  (b) $x + y^2 + z = 0$, $x^2 + 2y + z = 0$,

а $\widetilde{C}$ — ее прообраз при раздутии начала координат в $\mathbb{C}^3$. Найдите точку пересечения $\widetilde{C}$ с исключительным дивизором этого раздутия.

(4) (будет разбираться на лекции) Пусть $\widetilde{X}$ — раздутие точки $(0,0,0)$ на поверхности X, заданной уравнением $z^2 + x^2 + y^4 = 0$ в $\mathbb{C}^3$ (особенность типа A_3).
  (a) Покажите, что поверхность $\widetilde{X}$ имеет одну особую точку P типа A_1.
  (b) Покажите, что исключительный дивизор на $\widetilde{X}$ состоит из двух прямых L_1, L_2, пересекающихся в точке P.

Таким образом, при раздутии точки P на $\widetilde{X}$ получается гладкая поверхность, причем исключительный дивизор состоит из одной прямой E, которую прообразы прямых L_1 и L_2 пересекают в разных точках. За два шага мы получили разрешение особенности с конфигурацией исключительного дивизора, соответствующей диаграмме Дынкина A_3.

(5) Пусть $\widetilde{X}$ — раздутие точки $(0,0,0)$ на поверхности X, заданной уравнением $z^2 + x^2 + y^5 = 0$ в $\mathbb{C}^3$ (особенность типа A_4).
  (a) Покажите, что поверхность $\widetilde{X}$ имеет одну особую точку P типа A_2.
  (b) Покажите, что исключительный дивизор на $\widetilde{X}$ состоит из двух прямых L_1, L_2, пересекающихся в точке P.
  (c) Пусть $\widehat{X}$ — раздутие точки P на $\widetilde{X}$. Так как P — особая точка типа A_2, исключительный дивизор на $\widehat{X}$ состоит из двух прямых E_1 и E_2. Покажите, что прообразы $\widetilde{L_1}$ и $\widetilde{L_2}$ прямых L_1 и L_2 при этом раздутии пересекаются с разными прямыми исключительного дивизора.

Таким образом, при раздутии точки P на $\widetilde{X}$ получается гладкая поверхность, причем исключительный дивизор состоит из прямых $\widetilde{L_1}$, E_1, E_2, $\widetilde{L_2}$, и каждая пара соседних прямых в этом списке пересекается в одной точке. За два шага мы получили разрешение особенности с конфигурацией исключительного дивизора, соответствующей диаграмме Дынкина A_4.