"Автоморфизмы аффинного пространства"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика"(г. Дубна), 21-24 июля 2013 года

Задачи к занятию 1

Задача 1. Докажите, что

(a) отображение $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^3$, инъективно, но не сюръективно;
(b) отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, биективно, но не является автоморфизмов;
(c) биективное полиномиальное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является автоморфизмом.
(d) Для любого конечного поля $\mathbb{K}$ приведите пример полиномиальной биекции $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, не являющейся изоморфизмом.

Задача 2. Пусть n – натуральное число. Следующие условия эквивалентны:

(a) поле $\mathbb{K}$ конечно;
(b) любое отображение $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ полиномиально.

Задача 3. Приведите примеры:

(a) бесконечного поля характеристики p;
(b) поля, содержащего $\mathbb{C}$ в качестве собственного подполя;
(c) алгебраически замкнутого поля, не изоморфного полю $\mathbb{C}$.

Задача 4. Следующие условия эквивалентны:

(a) поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым;
(b) для любых натуральных n и m и любых многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ найдется такой многочлен $g(x_1, \dots, x_n)$, что множество решений системы

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

и множество решений уравнения $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ совпадают.

Задача 5. Является ли полиномиальное отображение

$$(x,\, y) \mapsto (x + xy - y^2,\, y + x^3)$$

автоморфизмом?

Задача 6. Опишите образ полиномиального отображения

$$(x,\, y) \mapsto (x,\, xy).$$