"Автоморфизмы аффинного пространства"

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика"(г. Дубна), 21-24 июля 2013 года

Задачи к занятию 3

Задача 1. Пусть D_1 и D_2 – дифференцирования. Тогда отображение $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ также является дифференцированием.

Задача 2. Пусть D – локально нильпотентное дифференцирование и f, g, h – многочлены. Тогда

(a) $D(fg) = 0$ тогда и только тогда, когда $D(f) = D(g) = 0$.
(b) hD локально нильпотентно тогда и только тогда, когда $D(h) = 0$.

Задача 3. Пусть D – локально нильпотентное дифференцирование. Докажите, что многочлен f инвариантен относительно автоморфизма $\exp(D)$ тогда и только тогда, когда $D(f) = 0$.

Задача 4. Докажите, что автоморфизм Нагаты имеет вид $\exp(hD)$, где $h = y^2 + xz$ и $D = z\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial x}$. Проверьте, что D локально нильпотентно и $D(h) = 0$.

Задача 5. Докажите, что автоморфизмы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ действуют на пространстве $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно для любого $n \geq 2$.

Задача 6. Докажите, что группа SL_2 действует на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ 3-транзитивно, но не 4-транзитивно. Сколько транзитивно действует группа SL_n на проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ при $n \geq 3$?

Задача 7. Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – бесконечное замкнутое подмножество и $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{A}^n$ – произвольные точки. Докажите, что найдется вложение $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^n$, для которого эти точки лежат в образе $\varphi(X)$.