Случайные блуждания на плоскости и их пределы: простое случайное блуждание, LERW и SAW

Ольга Ромаскевич, Дмитрий Челкак

1. Первая лекция: случайное блуждание на плоскости и вероятность выхода на границу.

1.1. **Случайное блуждание: описание.** Рассмотрим целочисленную решётку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости с отмеченной точкой $(0,0) \in \mathbb{Z}^2$ – началом координат. Каждой точке решётки v соответствуют четыре точки, в которые можно из неё шагнуть по выходящим из неё ребрам: мы будем обозначать эти точки $v^+, v^-, v^\sharp, v^\flat$ для шагов направо, налево, вверх и вниз соответственно.

Случайное блуждание – это недетерминированное передвижение по решетке $\mathbb{Z}^2$: стартуя из нуля, мы делаем один шаг в секунду, переходя в одну из соседних вершин к той вершине, в которой мы находились в предыдуший момент. При этом решение, в какую вершину шагнуть, принимается случайным образом – мы подкидываем "монетку" с четырьмя сторонами, при этом вероятность каждой из сторон равна $\frac{1}{4}$ (или, если так проще думать, две обычных монетки подряд – первая выбирает направление: вертикаль или горизонталь, вторая смещение: увеличение или уменьшение координаты).

Случайное блуждание есть случайный процесс, а именно последовательность так называемых *случайных величин* $v_0, v_1, v_2, \ldots$. Каждое v_i – некоторая вершина, при этом $v_0 = 0$ и $\mathbb{P}(v_{n+1} = v_n^*) = \frac{1}{4}$, где $* = +, -, \sharp, \flat$. То есть находясь в вершине v_n в момент времени n, мы можем попасть в одну из четырех соседних вершин с одинаковыми вероятностями. О случайном блуждании на плоскости можно долго говорить, например, обсуждать вопрос о том, с какой вероятностью случайное блуждание возвращается в начало координат [об этом см. задачу 2 из первого листка с задачами] или на какое среднее расстояние мы отойдем через время n. Однако мы будем скорее интересоваться вопросами о случайном блуждании не на всей плоскости, а в некоторой ограниченной подобласти. В основном, мы будем интересоваться дискретными постановками задач, но они будут идти параллельно с их непрер*ывными аналогами.

1.2. **Дискретные области.** *Дискретной областью* Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется связное подмножество решётки $\mathbb{Z}^2$, лежащее в пересечении с некоторой областью Ω в $\mathbb{R}^2$. Мы будем обозначать дискретные и непрерывные области одной и той же буквой Ω.

Границей $\partial\Omega$ дискретной области Ω мы называем множество ориентированных ребер решетки $\mathbb{Z}^2$, начала которых лежат в области Ω, а концы которых торчат вне Ω. Заметим, что может выйти так, что два элемента границы (два ребра) имеют концом одну и ту же точку вне дискретной области Ω: такие ребра правильно считать различными.

Теперь интересующая нас постановка такова: мы не просто блуждаем по всей плоскости, а блуждаем только по небольшому городу с сеткой улиц (ближе всего эта постановка к манхэттенской реальности), ограниченному областью Ω, $\partial\Omega$ состоит из "ворот", через которые мы из города выходим. После выхода из города наша судьба никого не интересует: если случайное блуждание вышло на границу, оно останавливается.

Внутренние точки (точки в Ω_{int}) области Ω мы будем обозначать буквами из конца латинского алфавита: $u, v, w, \ldots$, "точки" (а на самом дел, ребра) на границе мы будем обозначать буквами из начала латинского алфавита: $a, b, c, \ldots$.

1.3. **Вероятность выхода на границу.** Основной объект, которым мы будем заниматься, обозначается $\omega_\Omega(v, a)$. Это *вероятность, начав в точке* $v \in \Omega_{int}$, *выйти из области* Ω *по ребру* a.

Путём на решетке мы будем называть последовательность рёбер, каждые 2 соседних ребра при этом должны иметь общую вершину: путь – это реализация случайного блуждания. Пути мы будем обозначать буквой γ.

Предложение 1. *Вероятность* $\omega_\Omega(v, a)$ *выйти на границу есть следующая сумма по путям*

$$\omega_\Omega(v, a) = \sum_{\gamma: v-->a} \left(\frac{1}{4}\right)^{|\gamma|} \tag{1}$$

Здесь суммирование ведется по всем путям, начинающимся в вершине v *и выходящим через ребро* a, *также* $|\gamma|$ *обозначает длину пути, то есть количество ребер в этом пути.*

Доказательство. Это утверждение практически очевидно: вероятность выйти из точки v в нужном месте на границу равна среднему арифметическому четырех вероятностей: выйти в нужном месте из $v^+, v^-, v^\sharp, v^\flat$. Каждая из таких вероятностей есть аналогичная (1) сумма по путям меньшей на единицу длины. □

Вероятность выхода на границу области Ω *через дугу* $[a, b]$ будем обозначать $\omega_\Omega(v, [a, b])$. При этом дуга $[a, b]$ понимается как объединение всех точек на границе между точками $a, b \in \partial\Omega$. Здесь нужно договориться о направлении обхода: мы будем обходить границу против часовой стрелки от точки a до точки b (так, чтобы дискретная область оставалась слева от нас при обходе). Ясно, что $\omega_\Omega(v, [a, b])$ можно расписать как сумму

$$\omega_\Omega(v, [a, b]) = \sum_{c \in [a,b]} \omega_\Omega(v, c) \tag{2}$$

Таким образом, $\omega_\Omega(v, \Omega)$ есть вероятность выхода на границу области Ω. На самом деле, это число просто равно единице:

Теорема 1. *Для ограниченной дискретной области* Ω *вероятность выхода на границу равна единице (вероятность заблудиться в ограниченном городе равна нулю).*

Доказательство. Пусть d – диаметр дискретной области Ω (длина максимального горизонтального отрезка внутри области). Ясно, что путь, который делает d шагов направо, выйдет за границу области. Вероятность пройти по такому пути мала, но положительна: $\frac{1}{4^d}$. Тогда вероятность остаться внутри области Ω после d шагов оценивается сверху разностью $q := 1 - \frac{1}{4^d}, q < 1$. Вероятность остаться внутри после kd шагов оценивается уже через q^k. Но $q^k \to 0, k \to \infty$, поэтому вероятность остаться внутри области навечно равна нулю. □

1.4. **Основное свойство вероятности выхода: дискретная гармоничность.** Мы фиксируем граничное ребро a (фиксируем ворота, по которым мы выходим из города) и будем рассматривать $\omega_\Omega(v, a)$ как функцию от первого аргумента (от точки старта). Пока $\omega_\Omega(v, a)$ было определено лишь для внутренних точек $v \in \Omega_{int}$. Доопределим $\omega_\Omega(v, a)$ на границе области: на границе наше путешествие начав, сразу заканчивается. Поэтому если мы находимся на граничном ребре $b \neq a$, то вероятность попасть в a – нулевая: $\omega_\Omega(b, a) = 0, b \neq a$. Если же мы удачно попали в a, то вероятность $\omega_\Omega(a, a) = 1$.

Из Предложения (1) следует, что для любой внутренней точки v и любой граничной точки a выполнено:

$$\omega_\Omega(v,a) = \frac{1}{4}\sum_{*=+,-,\sharp,\flat} \omega_\Omega(v^*,a) \tag{3}$$

Поскольку область Ω и точка $a \in \partial\Omega$ на границе фиксированы, избавимся от лишних обозначений, введя функцию H:

$$H(\cdot) := \omega_\Omega(\cdot, a) \tag{4}$$

Заметим, что функция $\omega_{Omega}(\cdot, a)$ обладает следующим важным свойством: её значение в любой точке области Ω равно среднему арифметическому её значений в соседних точках.

Определение 1. Функция H, заданная в области $\Omega = \Omega_{int} \cup \partial\Omega \subset \mathbb{Z}^2$, называется *дискретно гармонической*, если для любой внутренней точки $v \in \Omega_{int}$ выполнено:

$$H(v) = \frac{1}{4}\left(H(v^+) + H(v^-) + H(v^\sharp) + H(v^\flat)\right) \tag{5}$$

1.5. **Вероятность выхода на границу как решение задачи Дирихле.** Что мы знаем о значениях функции $\omega_\Omega(\cdot, a)$? На границе эта функция всюду равна нулю, кроме точки a, в которой она принимает значение 1. А также, для всех внутренних точек выполнено условие (5). Таким образом, на значения функции $\omega_\Omega(\cdot, a)$ имеется N уравнений, где N – количество точек в области Ω. Неизвестных в этих уравнениях столько же – это $H(v), v \in \Omega_{int}; H(a), a \in \partial\Omega$.

Здесь нам понадобится некоторое напоминание из линейной алгебры: для системы линейных (неоднородных) уравнений можно записать соответствующую ей систему однородных уравнений, вычеркнув свободные члены (сделав их нулями). Например, для неоднородной системы $x+y=2; 2x-3y=3$ однородной системой будет $x+y=0; 2x-3y=0$. Напомним лемму из линейной алгебры (эта лемма – частный случай более общей альтернативы Фредгольма):

Лемма 1. *Система N линейных неоднородных уравнений с N неизвестными имеет либо ровно одно решение, либо вообще не имеет решений. При этом первый случай реализуется, если соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение, а второй – если она имеет нетривиальные решения.*

В нашем случае выполнен первый случай альтернативы. А именно

Предложение 2. *Система уравнений* (5)*, $v \in \Omega_{int}$; $H(a) = 0, a \in \partial\Omega$ имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. От противного: пусть существует нетривиальное решение H такой однородной системы. Тогда H достигает положительного максимума в некоторой точке $v \in \Omega_{int}$ (иначе рассмотрим $-H$). Условие (5) в точке v даст, что максимальное значение функции H есть среднее арифметическое ее значений в соседних точках $v*$. Значит, $H(v*) = H(v) = \max_\Omega H$. Распространяя это значение H, получим, что $H = \mathrm{const}$, но граничные значения – нулевые, следовательно $H \equiv 0$. $\square$

Следствие 1. Существует и единственна дискретно гармоническая функция в области Ω с любыми наперед заданными значениями на границе области.

Доказательство. Это следствие Леммы 1 и Предложения 2. $\square$

По научному Следствие 1 называется теоремой существования и единственности решения задачи Дирихле в дискретной постановке.

1.6. **Измельчение: переход к непрерывной задаче.** Мы рассматривали случайное блуждание на плоскости, используя решетку с длиной ребра - 1 сантиметр. В других странах математики рассматривают случайные блуждания на решетках с длиной ребра 1 дюйм, 1 фут и т.д. A priori неясно, есть ли у всех этих случайных блужданий что-нибудь общее. На самом деле, есть – их непрерывный аналог.

Попробуем измельчить решётку $\mathbb{Z}^2$, а именно для каждого малого $\delta > 0$ рассмотрим решётку с малым шагом $\delta\mathbb{Z}^2$. При этом рассматривается одна и та же непрерывная область Ω: на ней только меняется сетка. Можно сказать, что в городе орудует сумасшедший мэр, который перестраивает все улицы каждый год, делая их все мельче.

Рассмотрим непрерывную (а на самом деле, даже более хорошую – скажем, гладкую) функцию H в области Ω и ограничим её на решётку $\delta\mathbb{Z}^2$. Тогда выражение, которым мы прежде занимались, равно

$$\frac{1}{4}\left(H(v_\delta^+) + H(v_\delta^-) + H(v_\delta^\sharp) + H(v_\delta^\flat)\right) - H(v) \tag{6}$$

Посмотрим, как ведёт себя это выражение при малых δ. Для этого разложим соответствующие значения функции в ряд Тейлора по δ.

$$H(v^+) = H(x+\delta, y) = H(x,y) + \delta H'_x(x,y) + \frac{\delta^2}{2}H''_{xx}(x,y) + \dots \tag{7}$$

Мы опускаем члены третьего порядка по δ и выше. Здесь H'_x, H''_{xx} – частные производные по x первого и второго порядка соответственно. Произведя аналогичные выкладки для оставшихся $H(v^*)$ и подставив в выражение (6), получим, что

$$\frac{1}{4}\left(H(v_\delta^+) + H(v_\delta^-) + H(v_\delta^\sharp) + H(v_\delta^\flat)\right) - H(v) = \frac{\delta^2}{4}(H''_{xx} + H''_{yy}) + \dots = \frac{\delta^2}{4}\Delta H + \dots \tag{8}$$

Здесь многоточие опять же означает члены порядка малости 3 по δ и выше.

Определение 2. Дважды непрерывно дифференцируемая функция H в области (непрерывной) Ω называется *гармонической*, если её лапласиан (сумма вторых частных производных) равен нулю:

$$\Delta H := H''_{xx} + H''_{yy} = 0$$

Из (8) видно, что если пытаться приближать решения дискретной задачи Дирихле ограничениями непрерывной функции H на соответствующую решетку $\delta\mathbb{Z}^2$, то стоит брать гармоническую H, то есть такую, что $H''_{xx} + H''_{yy} = 0$. Тогда погрешность будет порядка δ^3, а не δ^2, как для любой другой функции.

Из этого вычисления также видно, что дискретным лапласианом стоит называть выражение

$$\Delta_\delta H = \frac{1}{\delta^2}\left(H(v_\delta^+) + H(v_\delta^-) + H(v_\delta^\sharp) + H(v_\delta^\flat) - 4H(v)\right) \tag{9}$$

Именно такие выражения стремятся к стандартному лапласиану в непрерывной постановке.

2. Вторая лекция: непрерывный предел случайных блужданий.

2.1. **Решение непрерывной задачи Дирихле в круге.** Дискретная задача Дирихле в дискретной области Ω состоит в поиске дискретно гармонической функции H с заданными значениями на границе: на дуге $[a,b]$ функция $H(v)$ совпадает с единицей, на дополнительной дуге – с нулём. Как обсуждалось ранее, такая задача отвечает на вопрос о вероятности выхода на дугу $[a,b]$ из внутренней точки $v \in \Omega$.

Естественным непрерывным аналогом такой задачи является задача поиска гармонической функции H: на границе области между точками a и b функция H совпадает с единицей, на дополнительной границе $H = 0$. Заметим, что H подразумевается достаточно гладкой *внутри* области Ω, однако H, конечно, разрывна на границе.

Оказывается, что такую задачу в круге можно решить явно. А именно,

Предложение 3. *Рассмотрим единичный круг $\mathbb{D}$ на комплексной плоскости и две точки $a, b \in \partial\mathbb{D}$ на единичной окружности. Тогда гармоническая функция $\omega_\Omega(z,[a,b])$, равная единице на дуге $[a,b]$ и нулю на дуге $[a,b]$, выражается явной формулой*

$$\omega_\Omega(z,[a,b]) = \frac{1}{2\pi}\left(\arg\frac{b-z}{a-z} - \frac{b-\bar{z}^{-1}}{a-\bar{z}^{-1}} = \frac{1}{2\pi}(\varphi-\psi)\right) \tag{10}$$

где φ – это ориентированный угол между $\overrightarrow{za}$ и $\overrightarrow{zb}$, а ψ – ориентированный угол между $\overrightarrow{\bar{z}^{-1}a}$ и $\overrightarrow{\bar{z}^{-1}b}$.

Доказательство. Несложно проверить граничные условия. Гармоничность этой функции вытекает из того, что аргумент частного есть разность аргументов и гармоничности функции $\arg z$ (см. задачи листка 1). $\square$

2.2. **Инвариантность гармонических функций: сдвиги и умножения на комплексные числа.** Напомним, что гармонические функции в области – это достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условию на производные:

$$H''_{xx} + H''_{yy} = 0$$

Посмотрим, относительно каких преобразований инвариантны гармонические функции.

Очевидно, что они инвариантны относительно сдвигов: $(x,y) \mapsto (x+a, y+b)$ и растяжений $(x,y) \mapsto (kx, ky), k \in \mathbb{R}$. Если записывать эти преобразования как преобразования комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с координатой z на ней, $z = x + iy$, то можно переписать, что гармонические функции инвариантны относительно сдвигов на комплексные числа $z \mapsto z + a, a \in \mathbb{C}$ и растяжений в k раз: $z \mapsto kz, k \in \mathbb{R}$.

Заметим, что на самом деле, $k \in \mathbb{R}$ можно заменить на $k \in \mathbb{C}$. Действительно, умножение на комплексное число k есть композиция растяжения в $|k|$ раз и поворота на угол $\arg k$. Инвариантность относительно растяжений уже обсуждалась, инвариантность относительно поворотов доказывается явно в задачах листочка 1. A priori, неясно, почему гармонические функции могли бы быть инвариантны относительно поворотов, и то, что явная проверка дает сохранение лапласиана при поворотах, кажется некоторым чудом. На самом деле, инвариантность лапласиана относительно поворотов настолько же неудивительна, как инвариантность функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ относительно поворотов. Кажется, что эта функция явно зависит от базиса, однако она есть просто квадрат расстояния от точки (x,y) до точки $(0,0)$. На самом деле, утверждения об инвариантности Лапласиана и инвариантности f относительно поворота – это одно и то же утверждение, однако это ясно, если знать преобразование Фурье (оно нам не понадобится).

Есть ли ещё какие-нибудь преобразования плоскости, которые сохраняют класс гармонических функций? Попробуем сначала ответить на этот вопрос в меньшей размерности – на прямой.

2.3. **Гармонические функции в одномерном случае.** Рассмотрим функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на прямой. Одномерный лапласиан есть просто вторая частная производная по единственной переменной x. Поэтому гармонические функции – это функции, удовлетворяющие уравнению $H''_{xx} = 0$. Такие функции – линейные: $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Преобразования (замены координат), сохраняющие класс линейных функций – это линейные преобразования. То есть в одномерном случае верно следующее утверждение: *гармонические функции сохраняются при гармонических заменах координат.*

Теперь рассмотрим двумерный случай: пусть $H(x, y)$ – гармоническая функция на плоскости и пусть φ – некоторое преобразование плоскости, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Координату в прообразе будем обозначать z, $z = x + iy$, координату в образе будем обозначать w, $w = u + iv$. Теперь $\varphi(z) = u(z) + iv(z), u, v \in \mathbb{R}$. То есть u, v – вещественнозначные функции комплексного аргумента.

В качестве φ хочется по аналогии с одномерным случаем подставлять гармонические функции. Но это, конечно, невозможно, ведь гармонические функции действуют из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$. Однако можно реализовать эту идею: можно брать φ такими, что их вещественные и мнимые части – гармоничны.

2.4. **Crash course по комплексному анализу.**

2.4.1. *Голоморфные функции.*

Определение 3. Функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *голоморфной* во внутренней точке $z_0 \in \Omega$, если существует комплексная производная φ в этой точке. То есть, существует предел

$$\varphi'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} \tag{11}$$

В случае функций вещественного переменного дифференцируемость не является слишком сильным условием: дифференцируемые функции могут вести себя достаточно плохо (например, могут быть недифференцируемы уже два раза). В случае комплексного переменного происходят резкие и удивительные изменения – голоморфная в точке z_0 функция разлагается в этой точке в сходящийся ряд Тейлора, то есть она является бесконечно дифференцируемой в комплексном смысле.

Такие изменения связаны с тем, что условие существования производной в точке z_0 намного сильнее, чем в вещественном случае: ведь теперь стремление $z \to z_0$ может рассматриваться по многим различным путям на комплексной плоскости в окрестности точки z_0 в то время как в вещественном случае стремление $z \to x_0$ может быть или слева, или справа.

Пусть z стремися к z_0 по горизонтальному направлению, то есть $z = z_0 + \delta, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда предел в (11) есть

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(x + \delta, y) - \varphi(x, y)}{\delta} = u'_x(z_0) + iv'_x(z_0) \tag{12}$$

Если z стремися к z_0 по вертикальному направлению, то есть $z = z_0 + i\delta, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда предел в (11) есть

$$(13) \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(x, y+\delta) - \varphi(x,y)}{i\delta} = \frac{u'_y(z_0) + iv'_y(z_0)}{i} = -iu'_y(z_0) + v'_y(z_0)$$

При этом выражения в (12) и (13) должны совпадать, если мы хотим, чтобы функция φ была голоморфной. Поэтому выполнено

Предложение 4. *Если функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфна в точке $z_0 \in \Omega$, $\varphi = u + iv$, то для функций u, v, рассматриваемых как вещественнозначные функции на плоскости (x, y), в точке z_0 выполнены следующие уравнения:*

$$(14) \qquad u'_x = v'_y, v'_x = -u'_y$$

Условия (14) называются условиями Коши-Римана.

На самом деле, обратное также верно – если выполнены условия Коши-Римана на функции u, v, то функция $\varphi = u + iv$ является голоморфной.

Следствие 2. Вещественная и мнимая часть (u и v) голоморфной функции φ являются гармоническими.

Доказательство. Действительно, дифференцируя уравнения Коши-Римана, имеем два равенства: $u''_{xx} = v''_{yx}$ и $v''_{xy} = -u''_{yy}$. Если функция v достаточно хорошая (это можно доказать, пользуясь голоморфностью φ), то порядок дифференцирования неважен: $v''_{yx} = v''_{xy}$, поэтому $u''_{xx} = -u''_{yy}$, что и есть условие гармоничности. Утверждение о функции v доказывается совершенно аналогично. □

Заметим, что голоморфных функций очень много – это все многочлены, все рациональные степени переменной z (например, $\sqrt{z}$) при условии однозначности функции, $\exp(z)$ и другие. Это следует из того, что формула для производной в определении голоморфной функции – такая же, как и в вещественном случае, поэтому доказательство дифференцируемости переписывается из вещественного случая заменой буквы x на букву z.

2.4.2. *Сохранение гармоничности голоморфными преобразованиями.* Наконец, мы можем ответить на вопрос о широком классе отображений, сохраняющих гармонические функции.

Теорема 2. *Если $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция, $H(\cdot)$ – гармоническая функция, то $H \circ \varphi$ – гармоническая функция в Ω.*

Строго это утверждение доказывается в упражнениях листка 2, но здесь мы его поясним.

Первое объяснение не очень строгое, однако даёт некоторое представление: локально голоморфные отображения суть растяжения в $|\varphi'(z_0)|$ раз и повороты на $\arg \varphi'(z_0)$ (если производнаяя $\varphi'(z_0) \neq 0$). Поэтому локально гармоничность сохраняется. Это рассуждение, однако, не учитывает члены высших порядков.

Второе объяснение следующее: по гармонической функции u можно научиться строить гармоническую функцию v так, что $\varphi := u + iv$ – голоморфна. Тогда утверждение Теоремы 2 следует из правила дифференцирования композиции голоморфных функций.

2.4.3. *Конформные отображения.*

Определение 4. Отображение $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ между двумя областями на комплексной плоскости называется конформным, если φ является непрерывной биекцией между областями и сохраняет углы между кривыми.

Угол между кривыми – *ориентированный* угол между их касательными прямыми. Чтобы проверить конформность, нужно сравнить угол между кривыми в точке z_0 и угол между их образами в точке $\varphi(z_0)$. Можно сформулировать эквивалентное определение:

Определение 5. Отображение $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ между двумя областями на комплексной плоскости называется конформным, если φ является непрерывной биекцией между областями и φ – голоморфно всюду в Ω, $\forall z \in \Omega$ производная $\varphi'(z) \neq 0$.

Заметим, что из голоморфности и условия $\varphi'(z) \neq 0$ не следует взаимнооднозначность отображения: достаточно рассмотреть отображение $z \mapsto \exp z$ на всей комплексной плоскости.

2.5. **Конформная инвариантность вероятностей выхода.** Напомним, что как $\omega_\Omega(z, [ab])$ мы обозначали голоморфную функцию в области Ω со значениями на границе: $\omega_\Omega(z, [ab]) = \chi_{[a,b]}(z)$, где $\chi_{[a,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$, то есть $\chi(z) = 1, z \in [a, b]$ и $\chi(z) = 0, z \notin [a, b]$.

Теорема 3. *Пусть существует конформное отображение $\varphi :\to \tilde{\Omega}$ между областями $\Omega, \tilde{\Omega}$. Тогда для любой внутренней точки $z \in \Omega$ и любой дуги границы $[a-, b] \in \partial\Omega$ выполнено:*

$$\omega_\Omega(z, [ab]) = \omega_{\tilde{\Omega}}(\varphi(z), [\varphi(a), \varphi(b)]) \tag{15}$$

Это утверждение очень важно: оно говорит о том, что вероятности выхода на границу *конформно инвариантны.*

Доказательство. Мы помним, что дискретно-гармонические функции в области однозначно задаются своими зачениями на границе. На самом деле, аналогичное утверждение верно и для гармонических функций: задав значения гармонической функции H на $\partial\Omega$, можно единственным образом её восстановить во всей области. Доказательство идёт от противного – если H_1, H_2 – две гармонические функции с равными значениями на границе, то их разность $H_1 - H_2$ – гармонична в области и принимает нулевое значение на границе. Тогда надо предположить, что она где-то достигает положительного максимума (иначе – перейти к $H_2 - H_1$) и провести рассуждения об усреднении, как в дискретном случае (здесь надо усреднять по малой окружности). Поэтому решение задачи Дирихле в непрерывном случае – **единственно.**

Но заметим, что функции в (15) имеют равные граничные значения и обе гармоничны по Теореме 2. □

2.6. **Дробно-линейные преобразования и пример явного решения задачи Дирихле.** Важным примером конформных преобразований комплексной плоскости являются дробно-линейный преобразования, то есть преобразования вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 1 \tag{16}$$

Последнее условие нужно для того, чтобы частное не было равно константе. Проверку конформности мы оставляем читателю (достаточно посчитать производную и доказать, что она неравна нулю).

Предложение 5. *Любое дробно-линейное преобразование является композицией преобразований одного из трех типов:* 1. *Умножение на комплексное число* $k \in \mathbb{C}$*:* $z \mapsto kz$

2. *Параллельный перенос* $z \mapsto z + c, c \in \mathbb{C}$

3. *Комплексная инверсия (композиция инверсии и отражения относительно вещественной оси):* $z \mapsto z^{-1}$.

Это утверждение обсуждается в листочке 2 с задачами. После того, как это утверждение доказано, несложно объяснить, почему дробно-линейные преобразования переводят класс прямые+окружностив себя: достаточно доказать это для отображений $1, 2, 3$.

Рассмотрим теперь единичный круг $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ с фиксированной внутренней точкой z_0. Несложно придумать дробно-линейное преобразование, сохраняющее этот круг и переводящее точку z_0 в ноль:

$$\varphi : z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{17}$$

Сохранение единичной окружности этим преобразованием следует из выкладки

$$|z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right| = \left|\frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right| |\bar{z}| = 1 \tag{18}$$

Из симметрии ясно, что $\omega_{\mathbb{D}}(0, [a, b]) = \frac{b-a}{2\pi}$. Поэтому, из Теоремы 3 следует, что можно посчитать $\omega_{\mathbb{D}}(z_0, [\varphi(a), \varphi(b)])$ и после замены переменной, и $\omega_{\mathbb{D}}(z_0, [c, d])$ для любых $c, d \in \partial\mathbb{D}$.

2.7. **Теорема Римана.** Одной из важнейших теорем комплексного анализа является теорема Римана: грубо говоря, она утверждает, что конформным преобразованием любую область можно перевести в любую. То есть теорема Римана говорит о том, что конформные преобразования – это очень богатое множество.

На самом деле, нужно накладывать некоторые условия на области: по крайней мере, односвязность (связность $\partial\Omega$). Односвязность Ω означает то, что в области Ω нет дырок. Несложно показать, что кольцо невозможно отобразить в круг даже непрерывным, не то, что голоморфным отображением.

Теорема 4. *Для любой односвязной области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и для любой внутренней точки* $z_0 \in \Omega$ *существует конформное отображение нашей области на единичный диск* $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ *такое, что* $\varphi(z_0) = 0$*, то есть переводящее заранее выбранную точку* z_0 *в ноль.*

При этом это отображение определено практически единственным образом (круг после того, как сделано φ, можно ещё повернуть на любой угол). Можно написать следующее добавление: φ в теореме Римана будет единственным, если дополнительно потребовать, что $\varphi'(z_0) \in \mathbb{R}$ и $\varphi'(z_0) > 0$. Равносильное этому требование состоит в том, что $\varphi(a) = 1$, где a – некоторая заранее выбранная точка на границе $\partial\Omega$.

Заметим, что с помощью униформизующего отображения из теоремы Римана можно найти $\omega_\Omega(z_0, [a, b])$ для произвольных односвязных областей Ω в $\mathbb{C}$ анаологично тому, как это делалось в части 2.6.

2.8. **Восстановление траектории по вероятности выхода.**

2.8.1. *Дискретный случай.* Вернемся к дискретному случаю: рассмотрим случайное блуждание по решётке с вероятностями p_+ пойти направо (перейти из v в v^+), p_- пойти налево (перейти из v в v^-), $p_\sharp$ – вверх (перейти из v в $v^\sharp$) и $p_\flat$ (перейти из v в $v^\flat$)– вниз.

Пусть блуждающий человек забыл вероятности на той монетке, которую он кидает. Пусть он забыл, чему равны $p_*, * = +, -, \sharp, \flat$. Можно ли их восстановить, зная вероятности выхода $\omega_\Omega(v, [a,b])$ на границу для всех дуг $[a,b]$, зная, что вероятности p_* не меняются по ходу движения (*мартингальное свойство*)?

Ответ: конечно, можно. Нам известно фундаментальное соотношение, чуть более общее, чем (3):

$$\omega_\Omega(v,[a,b]) = p_+\omega_\Omega(v^+,[a,b]) + p_-\omega_\Omega(v^-,[a,b]) + p_\sharp\omega_\Omega(v^\sharp,[a,b]) + p_\flat\omega_\Omega(v^\flat,[a,b]) \tag{19}$$

Из него видно, что если известны $\omega_\Omega(v, [a,b])$, то p_* находятся из огромного числа линейных уравнений, предоставленных (19) для различных дуг $[a,b]$.

2.8.2. *Непрерывный случай.* Красота науки о случайных блужданиях на решетках состоит в том, что у них есть непрерывный предел: измельчая решетку, можно рассмотреть предельную траекторию случайного блуждания. Чтобы её строго определить, надо долго мучиться, поэтому мы этого делать не будем. Поверим, что эта траектория существует и изучим ее свойства: она называется *броуновским движением* в честь Роберта Броуна, наблюдавшего его при движениях пыльцы растений.

Логично предположить, что если имеется предельная траектория для случайных блужданий, то вероятности ее выхода на границу суть пределы вероятностей выхода в допредельной ситуации. То есть предельные вероятности $\omega_\Omega(\cdot, [a,b])$ есть те самые гармонические функции, которые мы изучали ранее. На дискретном уровне эти вероятности определяют процесс, как было показано ранее. Из аналогии с дискретным случаем можно понадеяться, что и в непрерывном случае вероятности выхода $\omega_\Omega(\cdot, [a,b])$ определяют процесс. Но вероятности выхода *конформно инвариантны*, поэтому и предельный процесс (броуновское движение) *должен быть конформно инвариантным.* Но как мы видели ранее (см., например, Теорему 4 Римана), конформных преобразований безумно много, поэтому на такой процесс очень много ограничений: например, вероятность пойти по любому направлению – одна и та же (инвариантность относительно поворотов). Но это ещё не всё, так как инвариантность относительно инверсий требует от нас того, чтобы броуновское движение шло по всем окружностям или прямым, проходящим через точку старта, с одинаковой вероятностью, и так далее... Так часто бывает в физике: динамика, обладающая большим количеством симметрий, определяется очень хорошо.

При этом заметим, что из конформной инвариантности следует, что броуновское движение до соударения с границей идет во всех областях одинаково (распределение траекторий не зависит от области).

3. Третья лекция: случайное блуждание с удаленными петлями.

3.1. **Мартингальность случайного блуждания.** Как было показано на прошлой лекции, на броуновское движение есть очень много ограничений, поскольку броуновское движение конформно инвариантно (распределение траекторий сохраняется после конформных замен). Напомним, что факт инвариантности броуновского движения сдедовал из двух соображений: конформной инвариантности функций $\omega_\Omega(v, a)$ и тем, что броуновское движение определяется ими однозначно. При этом в рассуждениях использовалось фундаментальное соотношение

$$\omega_\Omega(v,a) = \left[\sum_{\gamma: v->a} \left(\frac{1}{4}\right)^{|\gamma|}\right] = \frac{1}{4}\sum_{\gamma: v^*->a} \omega_\Omega(v^*,a) \tag{20}$$

Слева в равенстве стоит значение функции в момент времени t, справа – среднее значение функции в момент времени $t+1$. Случайные процессы, обладающие свойством (20), называются мартингалами: состояние в момент времени t является наилучшим предсказанием нашего будущего в момент времени $t+1$: такие процессы возникают при моделировании "честных"игр.

3.2. **Выделенная точка на границе и функция Грина.** Рассмотрим дискретную подобласть в решетке $\mathbb{Z}^{\not\vDash}$: фиксируем некоторую внутреннюю точку области, без ограничения общности можно считать её началом координат $(0,0)$.

Из всех траекторий случайного блуждания, выходящих на границу области Ω, мы выберем только те, которые выходят на границу в фиксированной точке $a \in \partial\Omega$. Будем обозначать как $RW_\Omega(0,a)$ случайный путь (random walk) из точки 0 в точку a. При этом вероятность того, что случайный путь, выходящий на границу в точке a, совпадет с некоторым фиксированным путем γ, ведущим из 0 в a, равна

$$\mathbb{P}[RW_\Omega(0,a) = \gamma] = \frac{4^{-|\gamma|}}{\omega_\Omega(0,a)} \tag{21}$$

Действительно, в числителе стоит вероятность пути γ, а в знаменателе стоит вероятность пройти каким-либо образом от 0 до a: $\omega_\Omega(0,a) = \sum_{\gamma:0->a} 4^{-|\gamma|}$.

Таким образом, исходная вероятность перераспределяется между путями, которые выходят на границу *только* в точке a: то есть из множеств путей, ведущих из вершин v^* мы выбираем только те пути, которые ведут в a. Поэтому теперь вероятности перехода из вершины v в вершины $v^*, * = +,-,\sharp,\flat$ теперь, во-первых, зависят от вершины v и, во-вторых, могут различаться для различных $*$ (интуитивно: переход ближе к точке a более вероятен).

Теперь, в новом распределении, функция $\omega_\Omega(\cdot,a)$ не имеет смысла. Однако можно определить функцию $N_\Omega(v,u)$ как среднее количество посещений вершины u для случайного блуждания, выходящего из точки v: её ещё называют функцией Грина (см. больше про функцию Грина в задачах листка 3). В любой точке $v \neq u$ выполняется соотношение дискретной гармоничности

$$N_\Omega(v,u) = \frac{1}{4}\sum_{v^*, * = +,-,\sharp,\flat} N_\Omega(v^*,u) \tag{22}$$

3.3. **Самопересечения в траектории случайного блуждания.** Известно, что за N шагов в среднем случайное блуждание на решётке $\mathbb{Z}^2$ удаляется от точки старта на расстояние порядка $R = \sqrt{N}$. В круге радиуса R порядка N точек: отсюда следует, что вероятность самопересечься для траектории случайного блуждания высока.

Рассмотрим модель случайного блуждания с удаленными петлями, или LERW (loop erased random walk).

LERW можно определить на любом графе, не только на квадратной решетке. Фиксируем начальную точку и запускаем простое случайное блуждание на графе: в некоторый момент траектория пересечет сама себя. Тогда удалим получившуюся петлю и продолжим случайное блуждание. Таким образом, мы удаляем петли по мере поступления. Этот процесс корректно определен и приводит к некоторому вероятностному распределению.

Доказано, что случайное блуждание с удаленными петлями в среднем уходит дальше, чем случайное блуждание без удаленных петель (что ясно): $N \simeq R^{\frac{5}{4}}$. Значок $\simeq$ нужно здесь понимать в вероятностном смысле, а именно что для любых $\varepsilon, \sigma > 0$ существует достаточно большое $N = N(\varepsilon, \sigma)$ такое, что

$$\forall n > N : \mathbb{P}\left(R^{\frac{5}{4}-\sigma} \leq n \leq R^{\frac{5}{4}+\sigma}\right) > 1 - \varepsilon \tag{23}$$

Отсюда, кстати, видно, что траектория LERW не может быть гладкой (иначе она бы в среднем удалялась бы на расстояние N за N шагов).

Оказывается, что можно, как и в случае со случайным блужданием, рассмотреть предел LERW на измельчающихся решетках, он будет корректно определён и конформно инвариантен. Это довольно естественно: ведь удаление петель есть чисто топологическая процедура, и она не меняется при заменах координат. Поэтому конформная инвариантность пределов LERW должна следовать из конформной инвариантности пределов RW, то есть из конформной инвариантности броуновского движения. Однако строго доказать этот факт не так просто: ведь самопересечение – это очень неустойчивое, локальное свойство. Также возникает следующая проблема: невозможность определить *первую* петлю для броуновского движения. Поэтому на самом деле для строгого доказательства нужно искать новые наблюдаемые (новые функции), определяющие пределы LERW и являющиеся конформно инвариантными. Их дискретные аналоги появятся в конце этой главы.

Важным для нас объектом будет **блуждание с удаленными петлями, приходящее в выделенную точку на границе.** Обозначим через $LERW_\Omega(0, a)$ – случайное блуждание с удаленными петлями, приходящее в выделенную точку $a \in \partial\Omega$. Распределение вероятностей определяется аналогично (21).

3.4. **Симметричность LERW.** Заметим, что $RW_\Omega(0, a) = RW_\Omega(a, 0)$ в вероятностном смысле: достаточно посмотреть на распределение вероятностей (21), оно сохраняется при перемене мест 0 и a. На самом деле, для блуждания с удаленными петлями выполнено аналогичное утверждение:

Предложение 6. *$LERW_\Omega(0, a) = LERW_\Omega(a, 0)$*

Это утверждение означает, что вероятностное пространство слева совпадает с вероятностным пространством справа: совпадают множества кривых, а также вероятности каждой кривой. То есть по смыслу это означает, что вероятностное распределение кривых не зависит от порядка удаления петель: неважно, удалять петли, идя с начала траектории, или идя с конца.

Это утверждение следует из алгоритма Вилсона, подробно обсуждаемого в листке 3.

3.4.1. *Лирическое отступление: алгоритм Вилсона и независимость от порядка удаления петель. Остовным деревом* на графе G называется дерево, содержащее *все* вершины этого графа, ребра которого суть какое-то подмножество ребер графа G. Множество остовных деревьев на графе G будем обозначать как $\mathcal{T}(G)$. Для типичного графа количество остовных деревьев в нем огромно. Поэтому возникает вопрос, как выбрать случайно какое-нибудь остовное дерево.

Самый быстрый известный алгоритм работает за полиномиальное от количества вершин в графе G время и называется *алгоритмом Вилсона (Wilson's algorithm)*. Рассматривается *конечный* граф G. Мы будем "растить"дерево, то есть строить конечную растущую последовательность деревьев $T_k \subset G$ следующим образом (этот процесс описан и в задачах):

- T_0 – дерево из одной вершины (корня) r нашего графа, которая может быть выбрана как детерминистически, так и произвольным случайным образом;
- T_{k+1} получается из T_k выбором произвольной вершины графа $r_{k+1} \notin T_k$ и добавлением к T_k *случайной(!)* траектории LERW, построенной по случайному блужданию на G, начатому из r_{k+1}, и остановленному в момент первого удара в T_k.

Задачи листка 3 посвящены тому, что этот алгоритм дает случайное дерево с равномерной вероятностью: вероятность события, что остовное дерево, построенное с помощью алгоритма Вилсона, совпадает с заранее выбранным, равна $|\mathcal{T}(G)|^{-1}$ ***(все остовные деревья появляются с равными вероятностями)***.

Теперь Предложение 6 очевидно (после того, как доказана теорема Вилсона из листка 3), ведь вероятность того, что тот или иной несамопересекающийся путь является веткой LERW совпадает с вероятностью того, что этот путь появится в случайном дереве, генерируемом алгоритмом Вилсона. Генерируемое случайное дерево не знает, с какой стороны удалялись петли.

3.5. **Конформная инвариантность LERW.** Воспользовавшись лирическим отступлением, мы знаем, что распределение для случайного блуждания с удаленными петлями, выходящего из внутренней точки на границу, совпадает с распределением случайного блуждания с удаленными петлями, идущего с границы в эту внутреннюю точку. Мы будем изучать вторую величину – она удобнее, поскольку при движении по пути γ начиная с точки на границы, случайное блуждание оставляет рассматриваемую область $\Omega \setminus \gamma$ односвязной.

Фиксируем ребро a на границе области Ω: обозначим как a_{int} и a_{out} соответственно начало и конец этого ребра. Точка a_{int} является внутренней точкой дискретной области Ω, точка a_{out} лежит вне области.

Попробуем вычислить вероятности перехода p_*(зависящие от граничной точки a), а именно вероятности того, что случайное блуждание с удаленными петлями, стартовавшее в a и приходящее в 0, перейдет первым шагом в a_*, где a_* – одна из соседних к a_{int} вершин. Будем считать, что ребро a – вертикально, и входит в область Ω с юга. То есть нас будут интересовать те из трех вероятностей $p_{\leftarrow}, p_{\rightarrow}$ и $p_{\uparrow}$, для которых точки $a_{\leftarrow}, a_{\rightarrow}, a_{\uparrow}$ лежат внутри Ω.

Областью $\Omega \setminus \{a\}$ мы будем считать дискретную область, получающуюся из Ω выкидыванием точки a_{int}.

Лемма 2. *Выполняется*

$$\omega_\Omega(0,a) = \sum_{*=\leftarrow,\rightarrow,\uparrow} \omega_{\Omega\setminus\{a\}}(0,a_*) \cdot \sum_{\gamma: a_* -> a_{int}} \left(\frac{1}{4}\right)^{|\gamma|} \times \frac{1}{4} \tag{24}$$

Заметим, что в этом утверждении 0 можно заменить на любую внутреннюю вершину $v \in \Omega$.

Следствие 3. Для $* =\leftarrow, \rightarrow, \uparrow$ выполнено

$$p_* := \mathbb{P}[LERW_\Omega(a,0) \text{ делает первый шаг в } a_*] = \frac{\omega_{\Omega\setminus\{a\}}(0,a_*)}{\sum_* \omega_{\Omega\setminus\{a\}}(0,a_*)} \tag{25}$$

Предложение 7. *Для любой внутренней вершины $v \in \Omega$ выполнено тождество*

$$\frac{\omega_\Omega(v,a)}{\omega_\Omega(0,a)} = \sum_* p_* \frac{\omega_{\Omega\setminus\{a\}}(v,a_*)}{\omega_{\Omega\setminus\{a\}}(0,a_*)} \tag{26}$$

Это утверждение следует из Леммы 2 и Следствия 3.

Таким образом, функции $\frac{\omega_\Omega(v,a)}{\omega_\Omega(0,a)}$ являются дискретно гармоническими в области Ω, равны нулю на границе во всех точках, исключая точку a, а также равны единице при $v = 0$.

Предел таких функций при уменьшении шага решётки называется ядром Пуассона (ему посвящена задача 5 листочка 2). Ядро Пуассона мы можем контролировать (даже явно вычислять). Более того, оно конформно инвариантно. Мы уже сталкивались с той же аргументацией для броуновского движения: аналогичным образом (но с большим количеством техники) доказывается конформная инвариантность LERW. Это можно более подробно посмотреть в [1].

4. Четвертая лекция: константа связности для самоизбегающего блуждания.

Четвертая лекция обсуждает результат 2010 года, доказанный в статье [2]. Этот результат уникален, поскольку совмещает в себе следующие качества: его формулировка элементарна и занимает несколько строчек, его можно (с доказательством) объяснить школьникам за несколько часов, при этом он был получен всего всего пару лет назад и напечатан в одном из ведущих математических журналов мира.

4.1. **SAW: самоизбегающее блуждание.** Мы будем рассматривать случайное самоизбегающее блуждание (self-avoiding walk) на *шестиугольной* решётке $\mathbb{H}$, а не на квадратной, как было до этого. Так получается, что работать с шестиугольной решёткой – значительно проще.

Рассмотрим все несамопересекающиеся ломаные на данной решётке длины n: вероятности всех таких ломаных совпадают. Технически нам будет удобнее считать, что ломаные стартуют не из фиксированной вершины, а в середине некоторого фиксированного ребра (в точке o). Пусть c_n –количество путей длины n, стартующих из o.

Именно эту модель предложил Paul Flory для моделирования больших полимеров. Он провёл некоторое рассуждение, показывающее, что в размерности 2 радиус круга, в котором типично лежит траектория длины n, равен $R = n^{3/4}$. В размерности 2 этот ответ кажется верным (хотя до сих пор не доказан). Для размерности 3 Flory получил ответ $R = n^{3/5}$. На самом деле, численные эксперименты показывают, что в размерности 3 показатель чуть меньше: 0.59...

Заметим, что такая модель намного сложнее модели блуждания с удаленными петлями, поскольку каждый следующий шаг зависит не только от данной позиции, но и ото всей предыстории: у модели нет так называемого марковского свойства.

4.2. **Формулировка результата: константа связности.** Есть элементарные оценки на c_n: $c_n \geq 2^{n/2}$: действительно, из n шагов можно сделать $\frac{n}{2}$ шагов направо, а $\frac{n}{2}$ шагов вверх или вниз. Уже таких путей экспоненциально много. Оценка сверху: $c_n \leq 43^{n-1}$, так как на следующем шаге мы не можем возвращаться назад.

Отсюда видно, что c_n растет экспоненциально. Также верно

Предложение 8. *Для всех натуральных n, m выполнено:*

$$c_{n+m} \leq c_n c_m \tag{27}$$

(субмультипликативность)

Доказательство. Это очевидно следует из того, что самоизбегающее блуждание длины $n+m$ может быть разрезано на блуждание длины n и параллельно перенесенное в конец первого пути блуждание длины m. Однако выражение справа – больше, ведь совмещение двух таких блужданий может дать пересечение. □

Следствие 4. Если выполнено утверждение (27), то существует

$$\mu_{crit} := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \tag{28}$$

Гипотеза 1. Количество путей на шестиугольной решетке ведет себя как

$$c_n \sim C\mu_{crit}^n n^{\beta-1}, n \to \infty \tag{29}$$

При этом число μ_{crit} зависит от решётки, но $\beta - 1$ – универсальная константа, зависящая только от размерности (то есть предполагается, что для любой плоской решётки $\beta - 1$ одно и то же) и равна $\beta - 1 = \frac{11}{32}$.

Эта гипотеза подтвердилась бы конформной теорией поля, если бы было доказано свойство конформной инвариантности SAW, которое остается важным открытым вопросом.

Если мы верим в эту гипотезу, то можно оценить вероятность того, что два самоизбегающих пути длины n не пересекаются:

$$\mathbb{P}[\text{два SAW не пересекаются}] = \frac{c_{2n}}{c_n^2} \sim \frac{C_1\mu_{crit}^{2n} n^{\beta-1}}{C_2\mu_{crit}^{2n} n^{2\beta-2}} \sim Cn^{1-\beta} \tag{30}$$

4.3. **Производящая функция.** Будем рассматривать степенной ряд $\sum_n c_n \left(\frac{1}{\mu}\right)^n$. При достаточно больших μ такой ряд, очевидно, сходится. Критическое значение μ_{crit} – минимальное значение, при переходе через которое ряд начинает расходится: если для удобства обозначить $x := \frac{1}{\mu}$, то радиус сходимости ряда $\sum_n c_n x^n$ есть $x_{crit} = \frac{1}{\mu_{crit}}$.

Заметим, что рассматриваемый степенной ряд можно переписать как сумму по траекториям

$$\sum_n c_n \left(\frac{1}{\mu}\right)^n = \sum_{\gamma\in\text{SAW}} \mu^{-n}. \tag{31}$$

Если рассматривать всю плоскость, такой ряд будет расходится.

В ограниченных областях мы будем изучать следующую модель: вероятность траектории γ будет равна

$$\mathbb{P}_\Omega\{\gamma \in SAW\} = \frac{\mu^{-|\gamma|}}{\sum_\gamma \mu^{-|\gamma|}} \tag{32}$$

Здесь мы рассматриваем траектории различной длины.

4.4. **Вычисление μ_{crit}. Цель.** Мы докажем, что $\mu_{crit} = \mu_0 := \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Как и ранее, мы определим некоторую функцию F на решётке, удовлетворяющую некоторым соотношениям, которую мы будем называть дискретной наблюдаемой. на рёбрах для этой модели, удовлетворяющую некоторым соотношениям (аналогам дискретной гармоничности). Она позволит нам исследовать данную модель. Раньше,для простого случайного блуждания RW мы рассматривали функцию $\omega_\Omega(\cdot, a)$ и она была дискретно гармонической. Для блуждания с удаленными петлями LERW мы рассматривали функцию $\frac{\omega_\Omega(\cdot,a)}{\omega_\Omega(0,a)}$ и она была дискретно гармонической всюду, кроме одной точки. Теперь функция F окажется *дискретно голоморфной.*

Определение 6. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – некоторый комплексный параметр, $|\lambda| = 1$. Для модели самоизбегающего блуждания в области Ω, стартующего из ребра a на границе области, наблюдаемой назовём функцию на серединах рёбер z, заданную следующим образом

$$F^o_\Omega(z) := \sum_{\gamma: a->z, \gamma\in\Omega, \gamma\in \mathrm{SAW}} \mu^{-|\gamma|} \lambda^{\sharp\text{левых поворотов}-\sharp\text{правых поворотов}} \tag{33}$$

Таким образом, вес кривой, который был раньше, домножается на некоторый подкручивающий множитель: каждый левый поворот по решётке даёт домножение на λ, каждый правый поворот даёт домножение на $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$. Например, кривая, обходящая половину шестиугольника по часовой стрелке, дает вклад $\mu^{-3}\lambda^{-3}$.

4.5. **Доказательство дискретной голоморфности.** Рассмотрим какую-нибудь вершину v на шестиугольной решётке и три ребра, выходящие из неё. Вершины бывают двух типов: с левым и правым хвостом. Вершинами с левым (правым) хвостом мы называем те, горизонтальное ребро которых торчит направо (налево), а соответственно хвост из двух других ребер торчит налево (направо).

Для каждой вершины v рассмотрим двойственный треугольник, ей соответствующий (треугольник с вершинами на серединах рёбер, выходящих из v). Вершину, соответствующую горизонтальному ребру, обозначим z_1. z_2, z_3 – номера вершин, получающихся при обходе двойственного треугольника против часовой стрелки.

Обозначим $\tau := \exp(\frac{2\pi i}{3})$. Тогда оказывается, что дискретная наблюдаемая $F^a_\Omega(z)$ является дискретно голоморфной функцией, а именно дискретный интеграл от неё по двойственному треугольному контуру равен нулю. Эта длинная фраза означает, что выполнено

Предложение 9. *Существуют комплексные числа λ и μ такие, что для любой вершины v и для соответствующих ей вершин двойственного треугольника z_1, z_2, z_3 выполнено:*

$$F(z_1) + \tau F(z_2) + \tau^2 F(z_3) = 0 \tag{34}$$

Это условие мы будем использовать для вершин с левым хвостом. Для вершин с правым хвостом, конечно, выполнено то же равенство. Но мы будем писать его с минусом:

$$-(F(z_1) + \tau F(z_2) + \tau^2 F(z_3)) = 0 \tag{35}$$

Чуть позже станет ясно, почему мы так делали (на самом деле, для того, чтобы много слагаемых в сумме по всей области сокращалось).

Соотношение Предложения 9 – естественное. Немного неестественным, правда, выглядит определение самой дискретной наблюдаемой.

Доказательство. Доказательство этого соотношения – комбинаторное. Рассмотрим множество самоизбегающих путей в Ω, стартующих на границе в a, и оканчивающихся в одной из трех точек z_1, z_2, z_3. Это множество можно разбить на группы по три или по два пути следующим образом:

- Пусть путь γ затрагивает лишь одну из трёх вершин $z_i, i = 1, 2, 3$. Тогда такой путь можно продолжить ещё на один шаг вперёд: сначала до вершины v, а потом ещё на пол ребра, чтобы дойти до оставшихся z_j. Получаются три пути, их мы объединяем в одну группу.

  Таким образом, пути, проходящие через одну или через две вершины из множества z_1, z_2, z_3 попадают в одну из описанных групп.
- Теперь, пусть путь γ затрагивает все 3 вершины z_1, z_2, z_3: это значит, что он состоит из SAW до одной из вершин и почти полной петли из v в себя: эту петлю можно пройти в обратном порядке. Таким образом, пути γ сопоставляется путь той же длины, проходящий по тем же вершинам, но проходящий петлю вокруг v в другом направлении.

Посмотрим теперь на левую часть соотношения (34): это есть сумма по путям. Докажем, что пути из одной группы в сумме дают нулевой вклад в (34). Тогда получится, что общая сумма равна нулю.

Действительно, пусть γ_1, γ_2, γ_3 – пути из первой группы. Пусть $|\gamma|$ – длина самого короткого из них (он такой один). Тогда, с точностью до ненулевого множителя, сумма их вкладов равна

$$\text{вклад}(\gamma_1) + \text{вклад}(\gamma_2) + \text{вклад}(\gamma_3) = \lambda^{\sharp\text{л.поворот}_1 - \sharp\text{пр. поворот}_1} \mu^{|\gamma|} \left(1 + \tau\frac{\bar{\lambda}}{\mu} + \tau^2\frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{36}$$

Потребуем, чтобы скобка $\left(1 + \tau\frac{\bar{\lambda}}{\mu} + \tau^2\frac{\lambda}{\mu}\right)$ равнялась нулю: это одно условие на два свободных комплексных параметра λ, μ.

Теперь, посмотрим на пути γ_1, γ_2 из второй группы. Их длины равны: $|\gamma_1| = |\gamma_2| = |\gamma|$. Пусть T – это разность количества левых и правых поворотов от точки a границы до последней середины ребра (одной из точек z_i), где пути γ_1 и γ_2 всё ещё совпадают. Тогда сумма вкладов (с точностью до ненулевого множителя) равна

$$\text{вклад}(\gamma_1) + \text{вклад}(\gamma_2) = \lambda^T \mu^{|\gamma|} \left(\tau\bar{\lambda}^4 + \tau^2\lambda^4\right) \tag{37}$$

Потребуем, чтобы скобка $\left(\tau\bar{\lambda}^4 + \tau^2\lambda^4\right)$ равнялась нулю.

Из условия (37) можно получить, что $\mathrm{Re}(\tau\bar{\lambda}^4) = 0$ и используя то, что λ лежит на единичной окружности, $\lambda = \exp(i\varphi)$, можно вывести $\varphi = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$. Возьмем, $n = -1$, то есть $\varphi = -\frac{5}{24}\pi$. Для соответствующего λ условие (36) даст

$$\mathrm{Re}(1 + \frac{1}{\mu}(\tau\bar{\lambda} + \bar{\tau}\lambda)) = 1 + \frac{2}{\mu}\cos\frac{7\pi}{8} = 1 - \frac{2}{\mu}\cos\frac{\pi}{8} = 0 \tag{38}$$

Отсюда получаем, что для $\mu_0 = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ выполняется утверждение предложения. Эта лемма – единственное место, где используется значение μ_0. $\square$

4.6. **Оценка снизу на константу связности:** $\mu_{crit} \geq \mu_0$**.** Докажем, что ряд для производящей функции числа самоизбегающих путей расходится при $\mu = \mu_0$. Отсюда будет следовать оценка сверху на радиус сходимости этого ряда, то есть оценка снизу на константу связности.

Областью S_T будем называть бесконечную вертикальную полоску, состоящую из $T-1$ бесконечных столюцов из шестиугольников и соответствующих горизонтальных граничных рёбер. Множество вершин S_T задается как

$$V(S_T) = \{z \in V(\mathbb{H} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{3T+1}{2})\} \tag{39}$$

Рассмотрим следующую дискретную подобласть $S_{T,L}$ на шестиугольной решётке: издалека она выглядит как трапеция, основания которой вертикальны. Множество вершин области описывается как

$$V(S_{T,L}) = \{z \in V(S_T) : |\sqrt{3}\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z| \leq 3L\} \tag{40}$$

Здесь мы считаем, что длина ребра решётки равна единице и что точка a (ребро старта) находится в середине левой границы $S_{T,L}$. Обозначим левую границу $S_{T,L}$ за α, правую границу $S_{T,L}$ за β, верхнюю и нижнюю границы за ε и $\bar{\varepsilon}$ соответственно.

Сложим все доказанные нами неравенства вида (9) с правильными знаками: для вершин с левым хвостом – с плюсом, для вершин с правым хвостом – с минусом: то есть будем использовать равенства (35). Тогда значения $F(z)$ во внутренних точках $S_{T,L}$ сократятся и останутся только значения на границе $\alpha \cup \beta \cup \varepsilon \cup \bar{\varepsilon}$.

Посмотрим на вещественную часть полученного выражения. Для путей, которые выходят на правое основание β трапеции, ясно, что они делают одно и то же число левых и правых поворотов, поэтому вклад будет

$$\sum_{\gamma: o->\beta} \mu_0^{-|\gamma|} \tag{41}$$

Траектории, ведущие на верхнюю границу ε, делают два левых поворота, поэтому суммарный вклад есть

$$\sum_{\gamma: o->\varepsilon} \mu_0^{-|\gamma|} \operatorname{Re}(\tau\lambda^2) \tag{42}$$

Для путей, ведущих на нижнюю границу $\bar{\varepsilon}$:

$$\sum_{\gamma: o->\bar{\varepsilon}} \mu_0^{-|\gamma|} \operatorname{Re}(\bar{\tau\lambda}^2) \tag{43}$$

Есть ещё траектории, возвращающиеся назад, на левую границу α: они делают на три левых поворота больше, поэтому они вносят вклад

$$\sum_{\gamma: a->\alpha} \mu_0^{-|\gamma|} \operatorname{Re}(-\lambda^3) \tag{44}$$

Таким образом, имеем равенство:

$$\sum_{\gamma: o->\beta} \mu_0^{-|\gamma|} + \sum_{\gamma: o->\varepsilon,\bar{\varepsilon}} \mu_0^{-|\gamma|} \operatorname{Re}(\tau\lambda^2) + \sum_{\gamma: a->\alpha} \mu_0^{-|\gamma|} \operatorname{Re}(-\lambda^3) = 1 \tag{45}$$

Следствие 5. Для любой вертикальной полосы, сумма по траекториям $\sum \mu_0^{-|\gamma|} \leq 1$.

Доказательство. Доказывается переходом к пределу. □

4.7. **Оценка сверху на константу связности.** Уже ясно, что радиус сходимости ряда для производящей функции не превосходит $\frac{1}{\mu_0}$. Нам осталось доказать, что при $\mu > \mu_0$ ряд сходится. Отсюда будет следовать, что $\mu_{crit} = \mu_0$. Этому посвящен листочек 4.

Список литературы

[1] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, Wendelin Werner Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees

[2] Hugo Duminil-Copin and Stanislav Smirnov. The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ Preprint, arXiv:1007.0575v2, 2010.

[3] Wilson, D. B. 1996. Generating random spanning trees more quickly than the cover time.

[4] R.Lyons, Y. Peres Probability on Trees and Networks