# Случайные блуждания на плоскости и их пределы: простое случайное блуждание, LERW и SAW

Ольга Ромаскевич, Дмитрий Челкак

**Задачи к лекции №2: гармонические функции и конформные отображения.**

***1. Дискретный лапласиан.*** Рассмотрим квадратную решетку $\delta\mathbb{Z}^2$ с малым шагом $\delta$ и дискретный лапласиан, приспособленный к этому шагу:

$$[\Delta_\delta H](x,y) = \frac{1}{\delta^2}[H(x-\delta,y) + H(x+\delta,y) + H(x,y+\delta) + H(x,y-\delta) - 4H(x,y)].$$

На лекции было показано, что $[\Delta_\delta H](x,y)$ сходится к значению классического ("непрерывного") лапласиана $[\Delta H](x,y) = H''_{xx}(x,y) + H''_{yy}(x,y)$, если шаг решетки $\delta$ стремится к нулю (здесь мы считаем, что функция $H$ задана и является достаточно гладкой в окрестности точки $(x,y)$). Проверьте, что, если аналогичным образом определить дискретные лапласианы на треугольной или шестиугольной решетке с малым шагом, то они также будут приближать $[\Delta H](x,y)$. В сущности, это означает, что предельные вероятности выхода из заданной области (при $\delta \to 0$) на других решетках – точно такие же, как и на квадратной (и точно так же не зависят от конкретной ориентации решетки на плоскости).

***2. Голоморфные функции и условия Коши-Римана.*** Здесь и далее мы рассматриваем функции $f : \Omega \to \mathbb{C}$, заданные на некотором открытом подмножестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, и используем следующие обозначения для вещественных и мнимых частей: $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Напомним, что функция $f$ называется *голоморфной* (комплексно дифференцируемой) в точке $z_0 \in \Omega$, если существует предел

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

***2a.*** Покажите, что из условия голоморфности вытекает дифференцируемость функций $u, v$ (о которых мы думаем как о вещественных функциях двух вещественных переменных), однако обратное неверно. В частности, голоморфные функции должны удовлетворять условиям Коши-Римана: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Проверьте, что верно и обратное: если функция $f$ удовлетворяет условиям Коши-Римана в точке $z_0$, то она голоморфна в $z_0$.

***2b.*** Выведите из условий Коши-Римана, что обе функции $u, v$ *являются гармоническими.*

***2c.*** Проверьте (при помощи явного дифференцирования композиций функций), что свойство гармоничности сохраняется при голоморфной замене переменной $w = f(z)$. А именно, пусть $f : \Omega \to \Omega'$ – голоморфное отображение, а $H : \Omega' \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция (т.е. $\Delta H = H''_{uu} + H''_{vv} = 0$ всюду в $\Omega'$). В этих предположениях проверьте, что функция $[H \circ f](z) = H(u(x,y), v(x,y))$ является гармонической (т.е. $\Delta H = H''_{xx} + H''_{yy} = 0$ в $\Omega$).

***Конформные преобразования.*** Гладкое отображение $f$, определенное в окрестности $z_0$, называется конформным в этой точке, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через $z_0$ (точнее, углы между касательными к кривым). Отображение $f : \Omega \to \Omega'$ называется *конформным*, если оно взаимно-однозначно и конформно всюду в $\Omega$.

***2d.*** Проверьте, что если отображение $f$ голоморфно в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$, то $f$ конформно в этой точке. При этих условиях $f$ локально устроено как композиция растяжения (во сколько раз?) и поворота (на какой угол?).

***2e.*** Докажите, что верно и обратное: из требования конформности $f : \Omega \to \Omega'$ вытекает, что $f$ удовлетворяет условиям Коши-Римана (т.е. является голоморфной функцией комплексной переменной), и $f'(z_0) \neq 0$ (*подсказка:* обратное отображение также конформно).

***4. Простейшие примеры конформных отображений.***

*Дробно-линейные отображения* (ДЛО) комплексной плоскости – это отображения вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad (1)$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$ (зачем нужно это условие?). ДЛО естественно рассматривать на так называемой пополненной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (*сфере Римана*), то есть на плоскости с добавленной бесконечно удаленной точкой. По непрерывности, (1) доопределяется как $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ и $\infty \mapsto \frac{a}{c}$ (или же $\infty \to \infty$, если $c = 0$). Дробно-линейное отображение конформно (почему?), и обратное к нему тоже дробно-линейно (почему?).

***4a.*** Используя тот факт, что каждое ДЛО – это композиция сдвигов $z \mapsto z + b$, растяжений и поворотов $z \mapsto az$, и (комплексной) инверсии $z \mapsto z^{-1}$, докажите, что ДЛО переводят прямые и окружности (т.е. окружности на $\overline{\mathbb{C}}$) в прямые и окружности.

***4b.*** Найдите такое дробно-линейное отображение $f$, что $f(1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(\infty) = 1$ (много ли таких ДЛО?). Докажите, что $f$ является конформным отображением правой полуплоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{right}} := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ на единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

***4c.*** *Удаление прямого разреза.* Рассмотрите отображение $z \mapsto \sqrt{z^2 - a^2}$, заданное в области $\Omega := \mathbb{C}_{\mathrm{right}} \setminus [0; a]$ (здесь $a > 0$ – вещественный параметр). Докажите, что это – конформное отображение $\Omega$ на $\mathbb{C}_{\mathrm{right}}$ (*подсказка:* подумайте о композиции отображений $z \mapsto z^2 \mapsto z^2 - a^2 \mapsto \sqrt{z^2 - a^2}$). Как в этом случае устроено соответствие границ областей?

***4d.*** Комбинируя решения задач 4b и 4c, придумайте конформное отображение единичного круга с разрезом $\mathbb{D} \setminus [a; 1]$ (здесь $0 < a < 1$ – вещественный параметр) на $\mathbb{D}$.

***5. Ядро Пуассона.*** Как обсуждалось на первой лекции, есть только одна *дискретно*-гармоническая функция, принимающая нулевые значения на границе – тождественный нуль. В непрерывном случае это не совсем так: осложнения связаны с тем, что функция может быть неограниченной в окрестности границы области, при этом, как минимум формально, принимая нулевые значения всюду на $\partial\Omega$. Однако справделив такой факт: если "плохая" точка на границе только одна и функция неотрицательна всюду в $\Omega$, то она определена однозначно (с точностью до умножения на положительную константу). Эта функция $P_\Omega(\cdot; a)$ (конечно, зависящая от выбора особой точки $a$ на границе области) называется *ядром Пуассона в* $\Omega$.

***5a.*** Рассмотрим для начала неограниченную область $\mathbb{C}_{\mathrm{right}}$. У нее есть выделенная граничная точка $\infty$. Убедитесь, что $P_{\mathbb{C}_{\mathrm{right}}}(z; \infty) = x$. Докажите, что $P_{\mathbb{C}_{\mathrm{right}}}(z; 0) = \operatorname{Re}[z^{-1}] = x/(x^2+y^2)$, используя тот факт, что конформное отображение $z \mapsto z^{-1}$ переводит правую полуплоскость $\mathbb{C}_{\mathrm{right}}$ в себя, при этом выделенная граничная точка $\infty$ переходит в 0.

***5b.*** При помощи конформного отображения из задачи 4b, вычислите теперь $P_{\mathbb{D}}(z; 1)$ – ядро Пуассона в единичном круге, отвечающее граничной точке 1 (сверьте *ответ:* должно получиться $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$). Докажите, что $P_{\mathbb{D}}(z; a) = \frac{1-|z|^2}{|a-z|^2}$ для всех $a \in \partial\mathbb{D}$.

***5c.*** Обратите внимание, что в предыдущих примерах $(\mathbb{C}_{\mathrm{right}}; 0)$ и $(\mathbb{D}; 1)$ ядро Пуассона ведет себя как $|z - a|^{-1}$ около точки $a$. Это связано с тем, что граница области в этих случаях – гладкая кривая. Используя задачи 4c и 4d, найдите с какой скоростью "взрывается" ядро Пуассона при приближении к точке $a$, если это – конец прямого разреза.