Случайные блуждания на плоскости и их пределы: простое случайное блуждание, LERW и SAW

Ольга Ромаскевич, Дмитрий Челкак

Задачи к лекции №4: константа связности для самоизбегающего блуждания

Рассмотрим шестиугольную решетку $\mathbb{H}$ на плоскости и пусть начало координат o – это середина одного из ребер. Рассмотрим все несамопересекающиеся ломаные, идущие по ребрам $\mathbb{H}$, начинающиеся в o и имеющие фиксированную длину N (как и на лекции, нам удобнее считать, что один шаг ломаной – это два полуребра, принадлежащие разным ребрам с общей вершиной). Обозначим через c_n количество таких ломаных.

0. Докажите, что для любой последовательности $(c_n)_{n\geqslant 0}$, такой что $c_{n+m} \leqslant c_n c_m$ (это свойство выполняется в нашем случае), существует предел $\mu_{\mathrm{crit}} := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$, характеризующий скорость экспоненциального роста элементов последовательности. В нашем случае μ_{crit} называется *константой связности* решетки $\mathbb{H}$ (осознайте, что определение имеет смысл и на других решетках, например квадратной или треугольной).

Основная теорема лекции – равенство $\mu_{\mathrm{crit}} = \mu_0 := \sqrt{2+\sqrt{2}}$ (этот результат получен в 2010 году в работе Х.Дюминил-Копана и С.К.Смирнова). Задача о нахождении μ_{crit} эквивалентна исследованию радиуса сходимости ряда

$$\mathrm{Z}_{\mathbb{H}}(\mu) := \textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_n (1/\mu)^n = \sum_{a\in\mathbb{H},\ \gamma:o\rightsquigarrow a} \mu^{-|\gamma|},$$

называемого *статистической суммой* самоизбегающего блуждания. На лекции было доказано, что $\mathrm{Z}_{\mathbb{H}}(\mu_0) = +\infty$, так что нам достаточно проверить $\mathrm{Z}_{\mathbb{H}}(\mu) < +\infty$, если $\mu > \mu_0$.

Пусть S_T обозначает бесконечную вертикальную полосу на $\mathbb{H}$, состоящую из $T-1$ бесконечных столбцов из шестиугольников и соответствующих горизонтальных граничных ребер. *Мостом* ширины T будем называть самоизбегающее блуждание внутри S_T от одной стороны до другой, определенное с точностью до параллельного переноса. Пусть $B_T(\mu) := \sum_{\gamma-\text{мост ширины } T} \mu^{-|\gamma|}$. *Напоминание:* на лекции было доказано, что $B_T(\mu_0) \leqslant 1$.

1a. Для $\mu > \mu_0$ и $T \geqslant 1$, докажите оценку $B_T(\mu) \leq (\mu_0/\mu)^{2T}$.

Для заданного самоизбегающего блуждания γ, начинающегося на (горизонтальном) ребре o, скажем, с полушага направо, построим следующее разложение: b_0 – мост ширины T_0 от o направо до первого из горизонтальных ребер γ, имеющих максимальную абсциссу; a_0 – "вертикальная скобка" (полуребро направо, некоторое количество ребер идущих влево-вверх/вправо-вверх и полуребро налево); b_1 – мост ширины T_1 налево до первого из горизонтальных ребер γ, имеющих минимальную абсциссу; a_1 – "вертикальная скобка", соединяющее b_1 со следующим мостом в разложении; b_2 – мост ширины T_2 направо до первого из оставшихся горизонтальных ребер γ, имеющих максимальную абсциссу; и т.д. (вертикальная скобка, мост налево, вертикальная скобка, мост направо,...).

1b. Заметьте, что $T_1 \geqslant T_2 \geqslant T_3 \geqslant \ldots$, и что статистическая сумма по путям γ, имеющим *фиксированную* последовательность длин мостов не превосходит величину

$$B_{T_0}(\mu)\cdot C\cdot B_{T_1}(\mu)\cdot C\cdot B_{T_2}(\mu)\cdot C\cdot ... \leqslant B_{T_0}(\mu)\cdot B_{T_1}(\mu)\cdot B_{T_2}(\mu)\cdot ...,$$

где $C := 2(\mu_0^3+\mu_0^5+...) < 1$ – оценка вклада всех вариантов вертикальных скобок (два горизонтальных полуребра и четное число ребер, идущих вверх или вниз).

1c. Докажите теперь, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_{\mathbb{H}}(\mu) &\leqslant \textstyle\sum_{T_0\geqslant 0} B_{T_0}(\mu)\ \cdot \sum_{N\geqslant 0,\ T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots\geqslant T_N>0} B_{T_1}(\mu)B_{T_2}(\mu)\ldots B_{T_N}(\mu)\\ &= \textstyle\sum_{T_0\geqslant 0} B_{T_0}(\mu)\ \cdot \prod_{T=1}^{+\infty}\left[1+B_T(\mu)+(B_T(\mu))^2+\ldots\right] < +\infty.\end{aligned}$$

Выведите отсюда и из пункта **1a**, что $\mathrm{Z}_{\mathbb{H}}(\mu) < +\infty$, если $\mu > \mu_0$.