ABC-Гипотеза | К. Конрад
Дубна, 2013 г. | Листок для лекции 4

Вспомните следующее:

А) Утверждение А: для каждого однородного многочлена $F(x,y) \in \mathbf{Z}[x,y]$ степени $d \geq 1$ без кратных линейных множителей над $\mathbf{C}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $c_{F,\varepsilon} > 0$ такая, что для всех $p, q \in \mathbf{Z}$ таких, что НОД$(p,q) = 1$ и $F(p,q) \neq 0$, $\mathrm{rad}(F(p,q)) \geq c_{F,\varepsilon} \max(|p|,|q|)^{d-2-\varepsilon}$.

Б) многочлен Белого — многочлен в $\mathbf{Q}[t]$ такой, что $f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) \in \{0,1\}$.

1. Проверьте, что $1 - \dfrac{1}{2}t^n$ и $\dfrac{t^{2n}(3-t^n)}{4}$ — многочлены Белого для $S = \{\sqrt[n]{2}\}$.
2. Проверьте, что $\dfrac{(t^2-5)^{48}(10-t^2)t^2}{24^{24}}$ — многочлен Белого для $S = \{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}$.
3. Оказывается, примером многочлена Белого, когда S равно корням $t^3 - t - 1$ является

$$\left(1 + \frac{27^{27} f^{23}(1-f)^4}{4^{23}31^4}\right)^{4^{19}31^4} \left(1 - \frac{27^{27} f^{23}(1-f)^4}{4^4 23^{23}}\right)^{23^{23}},$$

где $f = (t^3-t-1)^2 + 2(t^3-t-1) + 23/27$. Какое значение этого многочлена Белого у корней $t^3 - t - 1$: 0 или 1?

4. (Высоты)

а) Вычислите высоты в $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ точек $[1/2, -2/3, 6]$, $[1, 5/3, 15/18]$ и $[4, 0, 10]$.

б) Если $P = [a_0, \ldots, a_n]$ в $\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$, где все $a_i \in \mathbf{Z}$, то покажите, что $H(P) \leq \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$.

в) Пусть $\varphi\colon \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ при $\varphi([x,y]) = [x^d, y^d]$ (здесь и в следующих частях d — фиксированное целое). Докажите, что $H(\varphi(P)) = H(P)^d$ для всех $P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$.

г) Пусть $\varphi\colon \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \to \mathbf{P}^d(\mathbf{Q})$ при $\varphi([x,y]) = [x^d, x^{d-1}y, \ldots, x^i y^{d-i}, \ldots, y^d]$. Докажите, что $H(\varphi(P)) = H(P)^d$ для всех $P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$.

д) Пусть $\varphi\colon \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \to \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ при $\varphi([x,y]) = [x^d, y^d, x^d + y^d]$. Докажите, что $H(P) \leq H(\varphi(P)) \leq 2H(P)$ для всех $P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$.

ж) Пусть $f_0, \dots, f_n$ однородные многочлены в $\mathbf{Q}[x, y]$ общей степени $d \geq 1$ и $\varphi\colon \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \to \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ при $\varphi([x, y]) = [f_0(x, y), \dots, f_n(x, y)]$. Покажите, что есть константа $C > 0$, которая зависит от многочленов f_i такая, что[1] $H(\varphi(P)) \leq CH(P)^d$ для всех $P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. (Указание: используйте часть (б) и неравенство треугольника).

5. Пусть $F(x, y)$ однородный многочлен в $\mathbf{Z}[x, y]$ степени $d \geq 1$ и без кратных линейных множителей над $\mathbf{C}$. Иногда коэффициент при x^d в $F(x, y)$ равен 0, напр., $F(x, y) = xy(x + y) = x^2y + xy^2$ имеет степень 3, но нет x^3-члена. Для $c \in \mathbf{Z}$, пусть $F_c(x, y) = F(x, y + cx)$.

   а) Для $F(x, y) = xy(x + y) = x^2y + xy^2$ вычислите $F_c(x, y)$ и покажите, что коэффициент при x^3 в $F_c(x, y)$ равен 0 только для $c = 0$ и $c = -1$, а коэффициент при x^3 никогда не равен ± 1.

   б) Для общего F покажите, что коэффициент при x^d в $F_c(x, y)$ ненулевой для всех, кроме конечного числа $c \in \mathbf{Z}$.

   в) Покажите, что $F_c(x, y)$ не имеет кратных линейных множителей над $\mathbf{C}$ для всех c.

   г) Для целых p, q и c покажите, что НОД$(p, q) = 1$ тогда и только тогда, когда НОД$(p, q + cp) = 1$.

   д) Используя части (б), (в) и (г) покажите, что если из ABC-гипотезы следует Утверждение А для некоторого $F_c(x, y)$, то из ABC-гипотезы следует Утверждение А для $F(x, y)$. Поэтому, чтобы доказать, что из ABC-гипотезы следует Утверждение А для *всех* однородных $F \in \mathbf{Z}[x, y]$ без кратных линейных множителей над $\mathbf{C}$, достаточно предположить, что $F(x, y)$ имеет ненулевой коэффициент при x^d.

6. В доказательстве, что из ABC-гипотезы следует Утверждение А, для любого однородного многочлена $F(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ такого, что коэффициент при x^d не равен 0, мы использовали многочлен Белого, который соответствует $F(x, 1)$, чтобы построить два новых многочлена $A(x, y)$ и $B(x, y)$ в $\mathbf{Z}[x, y]$. Проверьте, что $F(x, y)$ является делителем $A(x, y)B(x, y)$ в $\mathbf{Z}[x, y]$.

[1] Обратное неравенство $C'H(P)^d \leq H(\varphi(P))$ доказываться труднее, и является оценкой, которая нужна в доказательстве того, что из ABC-гипотезы следует теорема Рота.