

Задачи к курсу В. А. Клепцына

Задача 1. Найдите

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \binom{N}{[Np]}.$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Задача 2. Пусть последовательности натуральных чисел $k_{1,N}, \dots, k_{l,N}$ удовлетворяют $k_{1,N} + \dots + k_{l,N} = N$ и

$$\frac{k_{j,N}}{N} \rightarrow p_j, \quad j = 1, \dots, l.$$

Найдите предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \binom{N}{k_{1,N}, \dots, k_{l,N}},$$

где $\binom{N}{k_1, \dots, k_l} = \frac{N!}{k_1! \dots k_l!}$ — мультиномиальный коэффициент.

Задача 3. Рассмотрим на клетчатой плоскости фигуру “без дырок”¹, разрезанную на доминошки. Раскрасим её шахматным образом, и для каждой чёрной клетки ориентируем её граничные рёбра² в направлении обхода против часовой стрелки, а для каждой белой — в направлении по часовой стрелке.

а) Проверьте, что это описание непротиворечиво.

б) Сотрём теперь рёбра между клетками, объединение которых даёт доминошки нашего разбиения. Докажите, что есть функция, определённая на вершинах клеток фигуры, приращение которой на каждом несвёртом ребре равно единице по модулю, причём направление возрастания указывает ориентация на этом ребре.

Определение 1. Введённая в предыдущей задаче функция называется *функцией высоты* разбиения.

Задача 4. Обобщите определения из предыдущей задачи на случай треугольной решётки (и решите задачу и в этом случае); придумайте, высотой чего именно в этом случае будет функция высоты.

Указание. Вспомните лекцию.

Задача 5. Рассмотрим правильный шестиугольник со стороной N , разрезанный на единичные правильные треугольники, и будем разбивать его на “доминошки”-ромбы (составленные из двух соседних по стороне треугольников). Докажите, что из любого разбиения можно перейти к любому, несколько раз применяя следующую операцию: найдя правильный шестиугольник со стороной 1, образованный тремя доминошками, повернуть эти три доминошки (вокруг центра образованного ими шестиугольника) на 60 градусов.

Указание. Нарисуйте пример. Посмотрите на него внимательно.

¹Т. е. односвязную — для тех, кому знаком этот термин.

²Т. е. нарисуем на них стрелочки.