Задачи к курсу “Асимптотические задачи комбинаторики” В. А. Клепцына, листок 2

Задача 1. Отметим несколько точек (x_i, y_i) на целочисленной решётке, в первом квадранте, так, что
$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_k, \quad y_1 > y_2 > \cdots > y_k = 0.$$
а) Напишите явно число диаграмм Юнга, (продолженная) граница которых проходит эти точки.
б) Напишите экспоненциально-точное приближение для этого количества (повторив выкладку лекции).
Ответ.
$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i)H(p_i)\right\}, \tag{1}$$
где
$$a_i = x_{i+1} - x_i, \quad b_i = y_{i+1} - y_i, \quad p_i = \frac{a_i}{a_i + b_i}, \quad H(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p).$$

в) Соединим эти точки ломаной (продолжив её лучами $y = 0$ и $x = 0$ за концевые точки). Пусть после поворота на 45 градусов и растяжения в $\sqrt{2}$ эта ломаная задаётся как график функции $u = f_0(t)$. Перепишите (1) в виде
$$\exp\left\{\int L(f_0'(t))\,dt\right\}. \tag{2}$$
г) Покажите, что после дополнительного сжатия в A раз, когда новая ломаная задаётся как график функции $u = f_0(t)$, приближающее выражение принимает вид
$$\exp\left\{A\int L(f'(t))\,dt\right\}. \tag{3}$$

Задача 2. Пусть $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, причём множество $M = \{g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ компактно, и градиент
$$\operatorname{grad} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$
не обращается в ноль на M. Докажите, что, если в точки $p = (p_1, \ldots, p_n) \in M$ функция f принимает своё наибольшее или наименьшее значение, то $\operatorname{grad} f|_p$ и $\operatorname{grad} g|_p$ пропорциональны; в частности, для некоторого $c \in \mathbb{R}$ выполнено $\operatorname{grad}(f + cg)|_p = 0$.

Задача 3. Подумайте, как будет выглядеть заключение предыдущей задачи для аналогичной задачи вариационного исчисления: найти максимум или минимум функционала
$$\mathcal{L}(f) = \int L(f, f')\,dx$$
при условии
$$\mathcal{G}(f) := \int G(f, f')\,dx = \text{const};$$
напишите соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа[1].

[1]Продвинутым слушателям: посмотрите значение термина “множители Лагранжа”.

Задача 4. а) Продифференцируйте $H(p)$.
Ответ.
$$H'(p) = \log\frac{1-p}{p}.$$
б) Напишите уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи поиска предельной формы диаграммы Юнга:
$$\mathcal{L}(f) := \int L(f'(t)) \to \max, \quad \mathcal{G}(f) := \int (f(t) - |t|)\,dt = 1, \quad |f'| \leq 1, \quad f(t) \geq |t|; \tag{4}$$
условиями типа неравенства пренебрегите (поверив, что решение будет жить “внутри” соответствующей “области”).
Ответ.
$$\frac{d}{dt}\left[(\log\frac{1-p}{p}) \circ (\frac{1+f'}{2})\right] = c = \mathrm{const}\,.$$
в) Пусть $u = f(t)$ — решение задачи (4); запараметризуем соответствующую кривую координатой t; вернёмся в исходные координаты: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Покажите, что $y'(t) - x'(t) = 1$ и $y'(t)/x'(t) = Be^{ct}$.
г) Найдите из предыдущей задачи предельную форму для диаграмм Юнга.
Ответ. $e^{-ax} + e^{-ay} = 1$, где константа $a = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ находится из условия, что кривая ограничивает единичную площадь.
д) Восстановите экспоненциальную часть формулы Харди–Рамануджана.
Ответ. Это $\exp\{2\frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{n}\}$