

## ТРЕХМЕРНЫЕ УТОЛЩЕНИЯ. Решайте эти задачи перед 1-м занятием!

Перед началом каждого (в т.ч. первого) занятия напишите список тех (пунктов) задач к этому занятию, которые Вы готовы рассказать у доски.

**0.1.** Из любых 6 точек в пространстве можно выбрать 5 точек  $O, A, B, A', B'$  так, что двумерные треугольники  $OAB$  и  $OA'B'$  имеют некоторую общую точку, кроме  $O$ .

В следующих задачах треугольник и другие фигуры (кроме трехмерной ленты Мебиуса) предполагаются двумерными и растяжимыми. Ответ ‘можно’ обосновывайте предъявлением конструкции (например, рисунка, как на рис. 1 или 2 справа). Достаточно нестрогих обоснований ответа ‘нельзя’.

**0.2.** Можно ли в трехмерном пространстве, не допуская самопересечений, склеить с указанными направлениями стороны (а)  $\vec{AB}, \vec{AC}$  и  $\vec{BC}$  треугольника  $ABC$ ?

(б)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}, \vec{BC}$  и  $\vec{AD}$  квадрата  $ABCD$ ? (с)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}, \vec{BC}$  и  $\vec{DA}$  квадрата  $ABCD$ ?

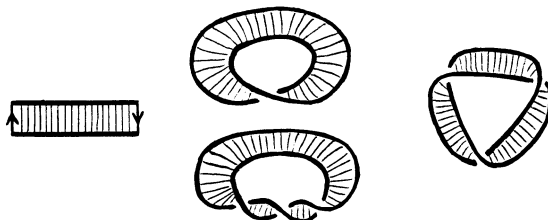


Рис. 1: Склейка прямоугольной полоски, дающая ленту Мебиуса

Лентой Мебиуса называется фигура, полученная из прямоугольной полоски склейкой двух ее противоположных сторон ‘с противоположным направлением’, рис. 1 справа.

**0.3.** Можно ли в трехмерном пространстве склеить без самопересечений треугольник и ленту Мебиуса так, чтобы контур треугольника приклеился бы к срединной окружности ленты?

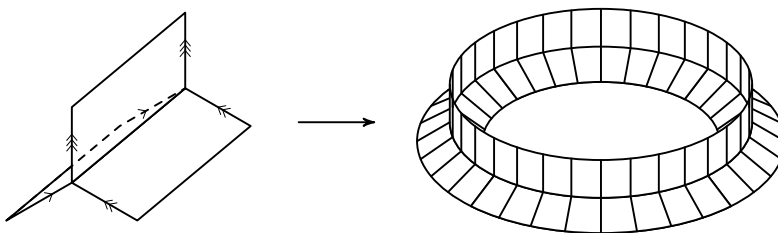


Рис. 2: Склеивание ребер

Возьмем в трехмерном пространстве  $n$  прямоугольников  $XYB_kA_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , любые два из которых пересекаются только по отрезку  $XY$ . Книжкой с  $n$  листами называется объединение этих прямоугольников, см. рис. 2 слева для  $n = 3$ .

Для перестановки  $\sigma \in S_n$  назовем  $\sigma$ -склейкой склейку, с указанными направлениями, сторон  $X\vec{A}_k$  и  $Y\vec{B}_{\sigma(k)}$  книжки с  $n$  листами для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$ , см. рис. 2 для  $n = 3$  и  $\sigma = \text{id}$ .

**0.4.** Можно ли в трехмерном пространстве осуществить  $\sigma$ -склейку без самопересечений?

(3a)  $n = 3, \sigma = (123)$ ; (3b)  $n = 3, \sigma = (12)(3)$ ; (4a)  $n = 4, \sigma = (12)(34)$ ;

(4b)  $n = 4, \sigma = (123)(4)$ ; (4c)  $n = 4, \sigma = (12)(3)(4)$ ; (5)  $n = 3, \sigma = (123)(45)$ .

**0.5.** Трехмерная лента Мебиуса получается из трехмерного цилиндра

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

склейкой точек  $(x, y, 0)$  и  $(x, -y, 1)$  для всех  $x, y$ . Эта склейка осуществляется не в трехмерном пространстве, а в четырехмерном пространстве или абстрактно. Какие из склеек предыдущих задач можно осуществить в трехмерной ленте Мебиуса?