

## Производящие функции

1.1. а) Постройте биекцию между множеством самосопряженных разбиений числа  $n$  и множеством его разбиений в сумму *различных нечетных* слагаемых.

б) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

1.2. Постройте биекцию между множествами разбиений числа  $n$  в сумму *различных* слагаемых и в сумму *нечетных* слагаемых.

1.3 (Тождества Гаусса). Докажите, что

а)

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots;$$

б)

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots} = 1 + q + q^3 + q^6 + \dots$$

1.4. Докажите, что производящая функция для диаграмм Юнга по полупериметру равна  $\frac{q^2}{1-2q}$ .

1.5. Обозначим через  $\sigma_n$  сумму делителей числа  $n$ , включая 1 и  $n$ ; так, например,  $\sigma_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ . Пусть  $\Sigma(q)$  — производящая функция для последовательности  $\sigma_n$ :

$$\Sigma(q) = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + \dots$$

а) Докажите, что

$$\Sigma(q)P(q) = qP'(q),$$

где  $P(q)$  — производящая функция для числа разбиений.

б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа  $\sigma_n$ .