q-биномиальные коэффициенты

2.1. Положим $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n]$. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!}.$$

2.2. (Для знакомых с основами линейной алгебры). Докажите, что число k-мерных векторных подпространств n-мерного векторного пространства над полем из q элементов равно $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$.

2.3 (q-бином Ньютона). а) Докажите, что

$$(1+x)(1+xq)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

б) Пусть переменные x и y не коммутируют, но вместо этого удовлетворяют соотношению $yx = qxy$. Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}.$$

2.4. Выведите из теоремы о q-биноме *конечную форму тождества Якоби для тройного произведения*:

$$\prod_{k=1}^{m} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{j(j+1)/2} x^j.$$

2.5. Найдите производящую функцию для числа плоских разбиений в параллелепипеде $m \times n \times 2$.