Непересекающиеся пути

3.1. Пусть $\Lambda_k = (k-1, \ldots, 2, 1)$ — *ступенчатая* диаграмма Юнга. Докажите, что число поддиаграмм Юнга в ней равняется *k-му числу Каталана* $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$

3.2 (Числа Каталана–Ганкеля). Докажите, что число плоских разбиений, лежащих внутри призмы с основанием Λ_k и высотой h, равняется определителю

$$\det(C_{k+i+j-2})_{i,j=1}^{h} = \det \begin{pmatrix} C_k & C_{k+1} & \ldots & C_{k+h-1} \\ C_{k+1} & C_{k+2} & \ldots & C_{k+h} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{k+h-1} & C_{k+h} & \ldots & C_{k+2h-2} \end{pmatrix}.$$

3.3. Докажите, что определитель из предыдущей задачи равен

$$\prod_{1 \le i \le j \le h} \frac{i+j+2k-2}{i+j-2}.$$

3.4. Найдите число поддиаграмм Юнга внутри произвольной диаграммы Юнга λ.

Указание. Установите взаимно-однозначное соответствие между поддиаграммами и наборами непересекающихся путей от точек $(0,0)$, $(0,1)$, …, $(0,k-1)$ до точек $(1,l_1)$, $(2,l_2)$, …, (k,l_k), где $l_i = \lambda_i + i - 1$.

3.5 (Формула Макмагона). Производящая функция для числа трехмерных диаграмм Юнга в прямоугольном параллелепипеде $a \times b \times c$ задается формулой

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c} \frac{[i+j+k-1]_q}{[i+j+k-2]_q}.$$

Выведите из этой формулы, что производящая функция для числа произвольных трехмерных диаграмм Юнга имеет вид

$$\mathbb{Y}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$