Дубна, 19 - 24 июля 2014 г.

Дифференцирования в алгебре

(1)

20.07 Лекция 1: Дифференцирования

Производная: $f(x) \mapsto f'(x) := \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$

Св-ва: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow (x^n)' = n x^{n-1}$

$\Rightarrow (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$

В алгебре коэфф. любые, это можно сч. определ.

Замеч $n x^{n-1}$ → целое неотриц. число
→ элемент мн-ва коэфф.: $n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}}$

Поле k: $+, \cdot, -, /, 0, 1$ Примеры $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{R}(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid g(x) \neq 0\}$, $f, g \in \mathbb{R}[x]$

Характеристика поля: $\operatorname{char} k = \min p : \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ раз}} = 0$
иначе $\operatorname{char} k = 0$

Замеч: $\operatorname{char} k = 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = const$
$\operatorname{char} k = p$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a_{kp} x^{kp} + \ldots + a_p x^p + a_0$

В харак. нуль α - корень кратн. k мн-на $f(x) \Leftrightarrow f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$
$f^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Всюду далее $\operatorname{char} k = 0$

Опр Алгебра A над полем k - это мн-во с тремя операциями

кольцо:
$A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a + b$
$A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$
$k \times A \to A$ $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$
(сложение и умножение на скаляр: вект. пр-во)

Дистриб: $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$

Мы дополн. требуем: 1) ассоциативность: $a(bc) = (ab)c$
2) коммутативность: $ab = ba$
3) единица: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Осн. пример: $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{\text{конеч.}} a_I x^I$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$
$x^I = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$
$a_I \in k$

Опр Алгебра A <u>кон. порожд.</u>, если $\exists a_1, .., a_s \in A : \forall a \in A \ \exists f(x_1, .., x_s)$ – порожд. $a = f(a_1, .., a_s)$. Например, $k[x_1, .., x_n]$ порожд. $x_1, .., x_n$.

Как строить алгебры: 1) подалгебры $A = k[x_1^2, x_1 + x_2] \subseteq k[x_1, x_2]$

2) факторалгебры: $A = {}^{k[x_1, .., x_n]}/_{I}$

Идеал $I \triangleleft A$:
- $a + b \in I \ \forall a, b \in I$
- $ac \in I \ \forall a \in I, c \in A$.

<u>Пример</u> Идеал в A, порожд. $a_1, .., a_s$: $(a_1, .., a_s) = \{ \sum_{i=1}^s b_i a_i \mid b_i \in A \}$

Факторалгебра $A/_I = \{ a + I \mid a \in A \}$

$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$

$(a + I)(b + I) = ab + I$

$\lambda(a + I) = \lambda a + I$

A к.п. $\Rightarrow A/_I$ к.п. $\forall$ идеала I.

Опр <u>Дифференцирование</u> алгебры A: отобр. $D: A \to A$:
- $D(\lambda a + \mu b) = \lambda D(a) + \mu D(b)$ – линейность;
- $D(ab) = D(a) b + a D(b)$ – правило Лейбница

<u>Примеры</u> 1) $A = k[x]$, $D(f(x)) = f'(x)$; 2) $A = k[x_1, .., x_n]$, $D = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 x_2 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3) = x_1 + 3 x_2^2 x_3$

3) A любая, $D(a) = 0 \ \forall a \in A$.

Как размножать дифференцирования?

$Der(A)$ – мн-во всех дифф. A. $\forall D, E \in Der(A)$, $\forall a, b \in A$ имеем

$aD + bE \in Der(A)$ $\quad (aD + bE)(c) := aD(c) + bE(c)$

Говорят, что $Der(A)$ явл. A-модулем.

Далее, $D, E \in Der(A) \not\Rightarrow D \circ E \in Der(A)$ – не образуют ассоц алгебру

Но легко проверить, что $[D, E] = D \circ E - E \circ D \in Der(A)$

Опр <u>Алгебра Ли</u> – это алгебра $\mathfrak{g}$ с операцией умн. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
$(x, y) \mapsto [x, y]$.
- антикоммут: $[x, y] = -[y, x]$;
- тожд. Якоби: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

<u>Замеч.</u> тожд. Якоби интерпрет. как правило Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Итак, $(Der(A), [,])$ – алгебра Ли.

<u>Предл.</u> Любое диффер. алгебры мн-ов $k[x_1,..,x_n]$ имеет вид
$$D = f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+f_n\frac{\partial}{\partial x_n},\quad f_1,..,f_n\in k[x_1,..,x_n].$$
□ Пусть D - диффер. и $f_i := D(x_i)$. Тогда D и $\sum f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ совпадают на x_i
$\Rightarrow$ по правилу Лейбница совпадают всюду ■

<u>Опр</u> <u>Ядро</u> $\operatorname{Ker} D = \{a\in A \mid Da=0\}$ - подалгебра в A.

<u>Пример</u> $A=k[x_1,..,x_n]$, $D=\frac{\partial}{\partial x_1}$ $\Rightarrow \operatorname{Ker} D = k[x_2,..,x_n]$.

Лекция 2: Локально нильпот. дифференцирования

Опр $D \in \mathrm{Der}(A)$ лок. нильпот., если $\forall a \in A\ \exists m \in \mathbb{N}: D^m a = 0$

лок. конечно, если $\forall a \in A$ $\langle a, Da, D^2 a, \dots \rangle$ конечномерно.

Примеры 1) $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$ – лок. нильпот.; 2) $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$, $D(x_1) = x_1$ – не лок. нильп.

$A = k[x_1, \dots, x_n]$ $\qquad D(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) = i_1 x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ – лок. конеч.

3) $D = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1}$: $x_1 \to x_1^2 \to 2x_1^3 \to 6x_1^4 \to \dots$ не лок. конеч.

Обозн $LND(A) \subseteq \mathrm{Der}(A)$

Констр: треугольные дифферен. $f_1(x_2, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$

уничтожит x_1, потом x_2 и т.д. – лок. нильпот.

Можно делать (обратимые) полином. замены коор: $\begin{array}{l} x_1 \to x_1 + x_2^2 \\ x_2 \to 2x_2 \end{array}$

и получать из треуг. новые LND.

Теорема (Rentschler'1988). Любое $D \in LND(k[x,y])$ заменой перем. приводится к виду $f(x)\frac{\partial}{\partial y}$

Для трех переменных это неверно.

Лемма Если $D \in LND(A)$ и $a \in \mathrm{Ker}\, D$, то $aD \in LND(A)$

$\square$ $(aD)^n = (aD) \dots (aD) = a^n D^n$, поскольку $D(aD(b)) =$

$= \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{D(a)} D(b) + a D^2(b) = a D^2(b)$ $\blacksquare$

Примеры $A = k[x,y]$, $D = x\frac{\partial}{\partial y}$, $E = y \frac{\partial}{\partial x}$ – LND

Тогда $D + E$: $x \Leftrightarrow y$ не LND

$[D,E] = \left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad x \to x$ не LND

Опр Степенная ф-я на алгебре A – это отобр $\deg: A \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$

такое что $\forall a, b \in A$: (1) $\deg a = -\infty \Leftrightarrow a = 0$

(2) $\deg ab = \deg a + \deg b$

(3) $\deg(a+b) \leq \max(\deg a, \deg b)$

Пример $A = k[x]$, $\deg(\underset{\neq 0}{a_n} x^n + \dots + a_0) = n$

Если $D \in LND(A)$, то определим

$$\nu_D(a) = \begin{cases} -\infty, & a = 0 \\ \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : D^{n+1} a = 0\}, & a \neq 0 \end{cases}$$

Опр Эл-т $a \in A$ - делитель нуля, если $a \neq 0$ и $\exists\, b \neq 0 : ab = 0$ (2)

Далее считаем, что A - __область целостности__, т.е. в A нет дел. нуля

__Предл.__ ν_D - степенная ф-я.

$\square$ (1) очевидно. Пусть $a, b \in A \setminus \{0\}$, $m = \nu_D(a)$, $n = \nu_D(b)$, $r = \max(m,n)$

Тогда $D^{r+1}(a+b) = D^{r+1}(a) + D^{r+1}(b) = 0 \Rightarrow \nu_D(a+b) \leq r$

Далее, $D^{m+n+1}(ab) = \sum\limits_{i+j=m+n+1} C^i_{m+n+1} D^i(a) D^j(b) = 0$

и $D^{m+n}(ab) = C^n_{m+n} D^m(a) D^n(b) \neq 0$ - нет дел. нуля! $\Rightarrow \nu_D(a+b) =$
$= m+n$ $\blacksquare$

__Следствие__ Если $\{a_i\}$ - порожд. A и $\exists\, m_i : D^{m_i}(a_i) = 0\ \forall i \Rightarrow D \in LND(A)$

__Опр__ Подалгебра $B \subseteq A$ назыв. __факториально замкнутой__, если
$a, b \in A$, $ab \in B \Rightarrow a, b \in B$.

__Примеры__ 1) $\underset{B}{k[x^2]} \subseteq \underset{A}{k[x]}$ - не факт. замк. : $x \notin B$, но $x \cdot x \in B$.

2) $\underset{B}{k[x]} \subseteq \underset{A}{k[x,y]}$ - факт. замкн.

__Лемма__ Пусть deg - степенная ф-я на A. Тогда $B = A_0 = \{a \in A \mid \deg a \leq 0\}$
- фактор. замк. подалгебра $\blacksquare$

Отсюда $D \in LND(A) \Rightarrow \operatorname{Ker} D \subseteq A$ - факт. замк. подалгебра.

__Замеч__ Если $a \in A$ __обратим__, т.е. $\exists\, a^{-1} \in A : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, то

$\deg(1) = \deg(1 \cdot 1) = \deg(1) + \deg(1) \Rightarrow \deg(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \deg(a) = 0 \Rightarrow a \in \operatorname{Ker} D\ \ \forall D \in LND(A)$

В част, если A - поле, то $LND(A) = \{0\}$.

__Предл.__ 1) Если $D \in LND(A)$ и $Da \in a \cdot A$, то $Da = 0$

2) Если $D \in LND(A)$, $a_1, \dots, a_n \in A$ и $\exists\, \sigma \in S_n : Da_i \in a_{\sigma(i)} A$,

то в каждой орбите σ $\exists\, i : Da_i = 0$

$\square$ М.сч. что σ цикл. Пусть $Da_i \neq 0\ \forall i$. Тогда

$$\nu_D(a_i)-1=\nu_D(Da_i)=\nu_D(a_{\sigma(i)}b_i)=\nu_D(a_{\sigma(i)})+\nu_D(b_i)\geq$$

$$\geq \nu_D(a_{\sigma(i)}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\nu_D(a_i)-n\geq\sum_{i=1}^{n}\nu_D(a_{\sigma(i)})$$ — противор. ∎

Теорема Пусть $D\in Der(A)$ и $a\in A\setminus\{0\}$. Тогда

$aD\in LND(A) \Leftrightarrow D\in LND(A)$ и $a\in Ker D$.

□ ($\Leftarrow$) уже знаем ($\Rightarrow$) Пусть $aD\in LND(A)$, $D\notin LND(A)$

Тогда $\exists b\in A: D^m b\neq 0\ \forall m \Rightarrow \nu_{aD}(b)\geq 0$

С одной стороны, $\nu_{aD}(aD^n b)=\nu_{aD}((aD)(D^{n-1}b))=\nu_{aD}(D^{n-1}b)-1$

с другой стороны, $\nu_{aD}(aD^n b)=\nu_{aD}(a)+\nu_{aD}(D^n b)=N+\nu_{aD}(D^n b)$

Получаем $\nu_{aD}(D^n b)=\nu_{aD}(D^{n-1}b)-(N+1)\ \forall n\geq 0$

$\Rightarrow \nu_{aD}(D^n b)=\nu_{aD}(b)-n(N+1)$ — невозможн. при $n\to\infty \Rightarrow$

$D\in LND(A)$. Далее, $(aD)(a)\in aA \Rightarrow a\in Ker(aD)=Ker D$ ∎

Экспоненциальное отображение

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ — ряд

Пусть $D\in LND(A)$. Тогда определим $\exp D: A\to A$

$(\exp D)(a)=a+\frac{Da}{1!}+\frac{D^2a}{2!}+\ldots$ — ~~многочлен~~ конечная сумма

Лемма 1) $\exp D(\lambda a+\mu b)=\lambda(\exp D)(a)+\mu(\exp D)(b)$ | автоморф- алгебры A

2) $\exp D(ab)=(\exp D)(a)\cdot(\exp D)(b)$

□ 1) сумма лин. операторов линейна

2) $\exp D(a)\cdot\exp D(b)=\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i}D^i a\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^j b\right)=\sum_{i+j=0}^{n+m}\frac{1}{(i+j)!}C_{i+j}^{j}\times$

$\times D^i a D^j b=\sum_{s=0}^{n+m}\frac{1}{s!}\left(\sum_{i+j=s}C_{i+j}^{j}D^i a D^j b\right)=\sum_{s=0}^{m+n}\frac{1}{s!}D^s(ab)=$

$=\exp D(ab)$ ∎

Лемма Если $D,E\in LND(A)$ и $[D,E]=0$,

то $\exp(D+E)=\exp(D)\circ\exp(E)$

Отсюда $\exp(t_1D)\exp(t_2D)=\exp((t_1+t_2)D)\ \forall t_1,t_2\in\Bbbk$ — однопарам.

группа автоморфизмов алгебры A. Обозн. $\exp(\Bbbk D)$

Предл. $\operatorname{Ker} D = A^{\exp(kD)} = \{a \in A \mid (\exp tD)a = a \ \forall t \in k\}$ (

□ Если $Da = 0$, то $\exp tD(a) = a + \frac{tDa}{1!} + \frac{t^2 D^2 a}{2!} + \dots = a$.

Обратно, если $\exp tD(a) = a \ \forall t$, то

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m \\ t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Da}{1!} \\ \frac{D^2 a}{2!} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

определитель Вандермонда $\Rightarrow Da = 0$ ■

обратимость

Цель: изучение ядер $\operatorname{Ker} D$, $D \in LND(A)$

Случай 1 $A = k[x] \Rightarrow D = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow \operatorname{Ker} D = k$

Случай 2 $A = k[x,y]$. Теорема Рентшера $\Rightarrow \operatorname{Ker} D \cong k[s]$.

Случай 3 $A = k[x,y,z]$ Теорема Миянши $\operatorname{Ker} D \cong k[s_1, s_2]$

При $n \geq 4$ это уже не так. При $n \geq 5$ $\operatorname{Ker} D$ бывает не к.п.
При $n = 4$ неизвестно.

Примеры 1) $A = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$ - базовое линейное диффере

Daigle - Freudenburg'01: $\operatorname{Ker} D$ порожд. 4-мя, но не 3-мя элемента
Есть примеры где число порождающих сколь угодно велико, но конечн

2) Daigle - Freudenburg'99: $A = k[x_1, \dots, x_5]$

$D = x_1^3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_5}$ - ядро не конечно порожден

Лекция 3 Слайсы

Опр Эл-т $s \in A$ называется слайсом диффер. $D \in LND(A)$ если $Ds = 1$. Эл-т $\ell \in A$ назыв. локальным слайсом для D, если $D\ell \neq 0$ и $D^2\ell = 0$.

Лемма Если $D \neq 0$, то лок. слайс $\exists$.

□ Возьмем $a \in A$: $Da \neq 0$. Тогда $\exists \underset{1}{\underset{\text{IV}}{m}}$: $D^m a \neq 0$, $D^{m+1} a = 0$. Остается положить $\ell = D^{m-1} a$ ■

A - без делит. нуля $\Rightarrow$ поле частных $QA = \left\{ \frac{a}{b},\ \begin{matrix} a,b \in A \\ b \neq 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \\ ad = bc \end{matrix} \right\}$

Пример $A = k[x_1, .., x_n] \Rightarrow QA = k(x_1, .., x_n)$

Локализация $S \subseteq A \setminus \{0\}$ - подмн-во, замк. от-но умножения

$S^{-1}A = \{ \frac{a}{s} \in QA \mid a \in A, s \in S \} \subseteq QA$ - подалгебра

$A_s = S^{-1}A$

Если $S = \{s^i\}_{i \geq 0}$, то это локализация A по S.

Дикспье

Пусть ℓ - лок. слайс для D. Определим отображ.

$\pi_\ell : A \to A_{D\ell}$, $\pi_\ell(a) = \sum\limits_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\ell^i}{(D\ell)^i} D^i a$

Если s - слайс, то $\pi_s(a) = \sum\limits_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} s^i D^i a$, $\pi_s : A \to A$

Теорема Пусть $B = \operatorname{Ker} D$. Тогда

1) $\pi_\ell(A) \subseteq B_{D\ell}$;

2) π_ℓ - гомоморфизм алгебр;

3) $\operatorname{Ker} \pi_\ell = \ell A_{D\ell} \cap A$;

4) $A_{D\ell} = B_{D\ell}[\ell]$. В частности, $A = B[s]$.

□ Случай 1 s - слайс 1) $D\left(\sum \frac{(-1)^i}{i!} s^i D^i a\right) = 0$

2) Пусть t - буква. Продолжим D с A на $A[t]$ положив $D(t) = 0$

Пусть $i : A \hookrightarrow A[t]$, $\varepsilon : A[t] \to A$ - вычисл. при $t = s$. Тогда

$\pi_s = \varepsilon \circ \exp(-tD) \circ i$

3) Надо проверить, что $\operatorname{Ker} \pi_s = sA_{Ds} \cap A = sA \cap A = sA$

Имеем $\pi_s(s) = s - (Ds)s = 0 \Rightarrow sA \subseteq \operatorname{Ker} \pi_s$ - поскольку идеал как ядро гомоморфизма

Обратно, $\pi_s(a)=0=a+sb,\ b\in A \Rightarrow a\in sA$

4) Поскольку ядро D на $A[t]$ совпадает с $B[t]$, $\pi_s: A[t]\to B[t]$

Определим $\varphi: A\to B[s]$, $\varphi=\varepsilon\circ\pi_s\circ\exp(tD)\circ i$, т.е.

$$\varphi(a)=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}\pi_s(D^i a)s^i$$

Тогда $\varphi(b)=b\ \forall b\in B$ и $\varphi(s)=s$ $[\pi_s(s)=0]$ $\Rightarrow$ φ сюръекция

Пусть $\varphi(a)=0 \Rightarrow$ все коэфф. $\varphi(a)\in B[s]$ равны нулю $\Rightarrow \pi_s(D^i a)=0$

$\forall i$. Пусть $N=\nu_D(a)$. Тогда $D^N a\in \operatorname{Ker}\pi_s=sA$ и $D^N a\in B\setminus\{0\}$

В силу фактор. замкн. $s\in B$ - против. $\Rightarrow$ φ инъек. $\Rightarrow$ φ изоморф.

$\Rightarrow A\cong B[s]$.

<u>Случай 2</u> ℓ-лок. слайс. Пусть D_ℓ - продолж. D на A_ℓ

Тогда $D\ell=f\in B$, $f\neq 0$ и $s=\frac{\ell}{f}$ - слайс для D_ℓ: $D_\ell\left(\frac{\ell}{f}\right)=$

$$=\frac{D_\ell(\ell)f-\ell D_\ell f}{f^2}=\frac{f\cdot f-0}{f^2}=1.$$ При этом π_ℓ = ограничение π_s

на A - сводится. ∎

<u>Следствие</u> (теорема о слайсе) Если $D\in LND(A)$ и $s\in A$ - слайс, а $B=\operatorname{Ker}D$, то $A=B[s]$ и $D=\frac{\partial}{\partial s}$.

<u>Проблема сокращения</u>

<u>Алг. версия</u>: A - некот. $\Bbbk$-алгебра и $A[t]\cong \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$. Верно ли, что $A\cong\Bbbk[y_1,\dots,y_{n-1}]$?

<u>Геометр. версия</u>: X - афф. алг. мн-е и $X\times\mathbb{A}^1\cong\mathbb{A}^n \Rightarrow X\cong\mathbb{A}^{n-1}$

<u>LND-версия</u>: Пусть $D\in LND(\Bbbk[x_1,\dots,x_n])$ и s - слайс для D. Верно ли, что $\operatorname{Ker}D\cong\Bbbk[y_1,\dots,y_{n-1}]$?

При $n\leq 3$ верно, далее неизвестно. Если $\operatorname{char}\Bbbk=p$ и $n\geq 3$, то неверно (Gupta'12,13)

Далее $A = k[x_1, \dots, x_n]$

Пусть $f_1, \dots, f_n \in A \Rightarrow J(f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Тогда

$$\det J(f_1, \dots, f_n) \in k \setminus \{0\} \Leftrightarrow A = k[f_1, \dots, f_n]$$

$(\Leftarrow)$ легко $(\Rightarrow)$ Проблема Якобиана, открыта при $n \geq 2$.

<u>Якобиево дифференцирование:</u>

Пусть $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ Тогда $\Delta_f(g) = \det J(f_1, \dots, f_{n-1}, g)$

<u>Пример</u> 1) $n = 2$, $f = (f_1)$, $f_1 = x_1 x_2$. Тогда

$$\Delta_f(g) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) g$$ – не лок. нильп.

2) $f = (x_1, \dots, x_{n-1}) \Rightarrow \Delta_f = \frac{\partial}{\partial x_n}$

~~Переформ~~ <u>Опр</u> $f_1, \dots, f_{n-1}$ алг. завис. $\Leftrightarrow \exists$ мн-н $h(y_1, \dots, y_{n-1})$
$h \neq 0$, но $h(f_1, \dots, f_{n-1}) = 0$

<u>Задача</u> $\Delta_f = 0 \Leftrightarrow f_1, \dots, f_{n-1}$ алгебр. зависимы

Переформулировки проблемы Якобиана:

1. Если Δ_f имеет слайс s, то $k[x_1, \dots, x_n] = k[f_1, \dots, f_{n-1}, s]$
2. Если Δ_f имеет слайс, то Δ_f лок. нильпот. и $\operatorname{Ker} \Delta_f = k[f_1, \dots, f_{n-1}]$

<u>Теорема Макар-Лиманова '1998</u> Пусть D – ненул. лок. нильпот. дифференцирование $k[x_1, \dots, x_n]$. Тогда $\forall$ алг. независ. $f_1, \dots, f_{n-1} \in \operatorname{Ker} D$ (они всегда есть) найдутся такие $a, b \in \operatorname{Ker} D$: $aD = b\Delta_f$. В частн., $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} \Delta_f$.

Лекция 4 : Градуировки и однородные LND

24.07.14

A - алгебра $\Rightarrow$ LND(A) - ? трудно.

Цель: описывать специальные классы ~~траекторий~~ LND.

Пусть $(S,+)$ - полугруппа и A - некоторая алгебра.

Опр S-градуировка на A это разложение $A = \bigoplus_{u\in S} A_u$ в прямую сум[му] подпр-в, такое что $A_u \cdot A_v \subseteq A_{u+v}$ $\forall u,v\in S$. Обозн $\deg a = u$ $\forall a\in$ [A_u]

Пример $A = k[x_1,\dots,x_n]$, $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A = \bigoplus_{u\geq 0} k[x_1,\dots,x_n]_u$, где $k[x_1,\dots,x_n]_u = \langle x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \mid i_1+\dots+i_n = u\rangle$

Эта градуировка задается условием $\deg x_1 = \dots = \deg x_n = 1$

Если положить $\deg x_i = a_i \in \mathbb{Z}$, будем получать разные $\mathbb{Z}$-град. на [A]

Открытая проблема (Проблема линеаризации для торов)

Пусть $A = k[x_1,\dots,x_n]$ и $A = \bigoplus_{u\in\mathbb{Z}} A_u$. Можно ли найти в A и однород[-]ных порождающих?

Пример $S = \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $A = k[x_1,\dots,x_n]$, $A_u = \langle x_1^{u_1}\dots x_n^{u_n}\rangle = k\, x_1^{u_1}\dots x_n^{u_n}$

Опр Дифференцирование $D: A\to A$ град. алгебры A называется однородным, если $\forall$ однород. $a\in A$ эл-т Da однороден.

Пусть нет делителей нуля и a, b - ненул. однород. эл-ты $\Rightarrow$

$D(ab) = (Da)b + aDb \Rightarrow \deg Da + \deg b = \deg a + \deg Db \Rightarrow$

$\deg Da - \deg a = \deg Db - \deg b := \deg D$ - не зависит от a и b

$\Rightarrow D(A_u) \subseteq A_{u+\deg D}$ $\quad R(A) = \{\deg D \mid D\text{-однор. LND}\}$ - мн-во кор[ней]

Замеч $\deg[D,E] = \deg D + \deg E$, $\deg(D+E)$ - часто не однородно

Задача Описать однор. LND на $k[x_1,\dots,x_n]$ с $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$-градуировкой

Пусть $D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\deg \frac{\partial}{\partial x_i} = (0,\dots,-1,\dots,0)$.

D однор. если либо $D = \lambda x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\frac{\partial}{\partial x_i}$, либо $D = \lambda x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}(x_{j_1}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} + \dots + x$[...]

Во втором случае Dx_{j_1} делится на x_{j_1} - не LND.

В первом случае $D\in LND \Leftrightarrow D = \lambda x_1^{i_1}\dots \widehat{x_i}\dots x_n^{i_n}\frac{\partial}{\partial x_i}$ - полная классиф[икация]

$\deg D = (i_1,\dots,-1,\dots,i_n)$ - все корни

Мотивировка: $k=\mathbb{C}$ - есть ровно две связные 1-мерные афф.

алгебр. группы: $\mathbb{G}_a=(\mathbb{C},+)$, $\mathbb{G}_m=(\mathbb{C}^\times,\times)$

↑ одномерный тор

Многомерный тор $T^n=\underbrace{\mathbb{G}_m\times\ldots\times\mathbb{G}_m}_{n\text{ раз}}$

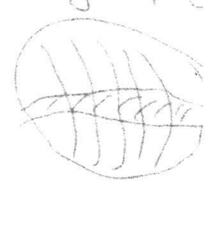
Действие $\mathbb{G}_a$ на $\mathbb{C}^k$ ⟺ лок. нильпот. дифференцир D на $\mathbb{C}[x_1,..,x$

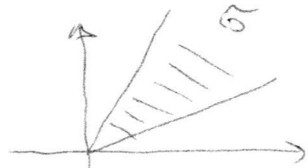
⟸ $\exp(tD)$ ⟹ $D=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$

Действие T^n на $\mathbb{C}^k$ ⟺ $\mathbb{Z}^n$-градуировка на $\mathbb{C}[x_1,..,x_k]$

Действие T^n нормализует $\mathbb{G}_a$-дейст. на $\mathbb{C}^k$ ⟺ соотв. диф. D однород

Замеч s - слайс для D ⟹ $\exp(tD)s=s+t$ ⟹ s - коор на орбитах





Конструкция "тонких" градуировок

Пусть σ - полиэдральный конус в $\mathbb{Q}^n$

$\exists\, v_1,..,v_k\in\mathbb{Q}^n$: $\sigma=\{\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_kv_k \mid \lambda_i\in\mathbb{Q}_{\geq 0}\}$. Рассмотрим $\sigma\cap\mathbb{Z}^n$.

Задача (Лемма Гордана) Полугруппа $\Gamma=\sigma\cap\mathbb{Z}^n$ конечно порождена

Полугрупповая алгебра $k\Gamma=\bigoplus_{u\in\Gamma}k\cdot\chi^u$, $\chi^u\cdot\chi^v=\chi^{u+v}$ $\forall u,v\in\Gamma$

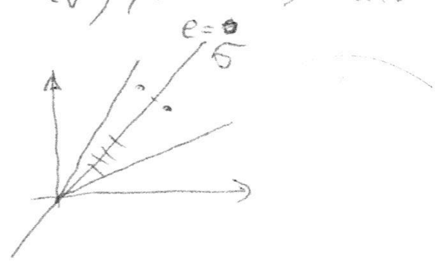
Это просто подалгебра в алгебре полиномов Лорана $k[x_1,x_1^{-1},..,x_n,x_n^{-1}]$

$A=\bigoplus_{u\in\Gamma}k\,x_1^{u_1}\ldots x_n^{u_n}$ - естест. "тонкая" градуировка. Пример $k[x_1,..,x_n]=k\mathbb{Z}^n_{\geq}$

Задача Описать однород. LND на $k\Gamma$. Пусть $D(\chi^u)=l_u\chi^{u+e}$, $l_u\in k$, $e=\deg D$

Имеем $D(\chi^{u+v})=l_{u+v}\chi^{u+v+e}=$

$=D(\chi^u\chi^v)=(D\chi^u)\chi^v+\chi^u D\chi^v=(l_u+l_v)\chi^{u+v+e}$ ⟹ $l_{u+v}=l_u+l_v$ - линей



Далее, $\operatorname{Ker}D=\langle\chi^u \mid l_u=0\rangle$

Из факториальной замкнутости

$\operatorname{Ker}D$ ⟹ $l=0$ - грань конуса σ

Из т. о лок. слайсе можно вывести, что это гипергрань

Рассмотрим двойст. решетку $N = \{\mathbb{Z}^n \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^n$

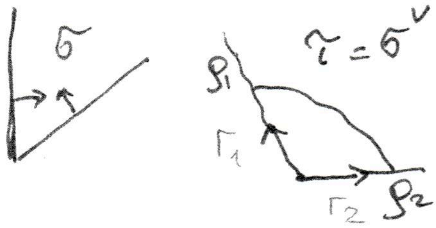
и двойств. пр-во $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n$. В частности,

Это пр-во линейных ф-й на исходном $\mathbb{Q}^n$.

$e \in N$

Двойственный конус $\tau = \sigma^\vee = \{ s \in N_{\mathbb{Q}} \mid s|_\sigma \geq 0 \}$

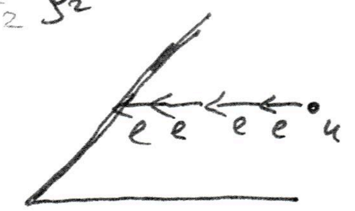
Пусть $\rho_1, \dots, \rho_t$ – ребра τ $\Leftrightarrow$ гиперграни σ



Положим $r_1, \dots, r_t$ – примитивные векто[ры] на ребрах τ. М. считать, что $e = r_i$

конус σ задан нер-ми $r_1(v) \geq 0, \dots, r_t(v) \geq 0$

Вернемся к D



Применение D много раз должно любой $u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ привест[и] на грань $e = 0$ $\Rightarrow$ $r_i(e) = -1$, $r_j(e) \geq 0 \ \forall j \neq i$

Опр Корень Демазюра e для конуса τ.

Задача $\forall$ полиэдр. конуса τ с каждым его ребром ρ_i связано бесконечно много корней Демазюра.

$\{$корни Демазюра$\}$ $\leftrightarrow$ $\{$однородные LND на $\Bbbk[\Pi]$ с точностью до пропорциональнос[ти]$\}$

$$e \quad \leftrightarrow \quad D_e(\chi^u) = r_i(u)\, \chi^{u+e}$$

Пример