Фракталы Рози, конспект лекций.

Лекция 1.

Подстановочные слова.

Слово Фиббоначи получается как предел слов u_n, где $u_0 = 0$ и $u_{k+1} = \varphi(u_k)$. Здесь φ – это *подстановка Фиббоначи*, определяемая по правилу

$$\varphi(0) = 01, \varphi(1) = 0.$$

Если взять другую подстановку

$$\phi(1) = 12, \phi(2) = 12, \phi(3) = 1$$

и начать со слова 1, то получится *слово Триббоначи* (на самом деле такого математика, конечно же, не существует, название по аналогии).

Обратите внимание, что φ можно применять ко всем конечным и бесконечным словам, состоящим из нулей и единиц. Например, если W – бесконечное слово, состоящее из одних нулей, то $\varphi(W) = 010101010\ldots$

Степень подстановки φ^k определяется как применение φ ровно k раз. Например, $\varphi^3(111) = 010010010$. Будем считать, что нулевая степень φ^0 действует тождественно.

Если есть (произвольная) подстановка h, то для того, чтобы построить бесконечное подстановочное слово, нужно найти такую букву алфавита a, что $h(a) = aU$, где U – некоторое ненулевое слово (то есть образ буквы начинается с неё же самой). Тогда получается последовательность слов, в которой каждое предыдущее слово является началом следующего:

$$\begin{gathered} u_0 = a \\ u_1 = h(a) = aU \\ u_2 = h(aU) = aUh(U) \\ \vdots \\ u_k = aUh(U)h^2(U)\cdots h^{k-1}(U). \end{gathered}$$

Бесконечное слово, получающееся в пределе, можно обозначить $h^\infty(a)$. Нетрудно проверить, что $h(h^\infty(a)) = h^\infty(a)$.

Замечание. Если разрешить подстановке превращать буквы в пустые слова, то можно не получить бесконечное слово. Пример: $h(0) = 01$, $h(1) = \varepsilon$ (пустое слово).

Слово Фиббоначи и «лесенка» на целочисленной плоскости.

Пусть U – слово, состоящее из нулей и единиц. Если в нём a нулей и b единиц, то обозначим $P(U) := (a, b)$ — *вектор буквенного состава слова* U. Например, $P(\varepsilon) = (0, 0)$, а $P(0100001) = (5, 2)$. Вектор для конкатенации двух слов – сумма векторов для частей: $P(U_1U_2) = P(U_1)P(U_2)$.

Построим на двумерной плоскости бесконечную ломаную такую, что первое звено начинается в точке $(0, 0)$, все звенья имеют длину 1, каждое звено идёт либо вверх, либо вправо и множество номеров звеньев, идущих вверх, совпадает со множеством позиций, на которых в $\varphi^\infty(0)$ стоят единицы.

Начало слова $\varphi^\infty(0)$ длины k обозначим A_k.

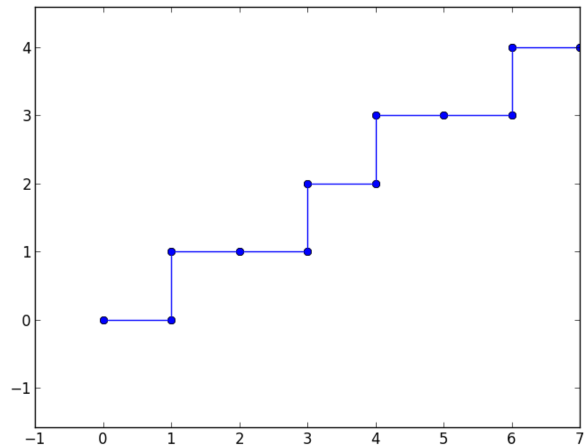


Рис. 1: Начальные звенья ломаной.

Очевидно, что все целые точки на ломаной (то есть её вершины) имеют координаты вида $P(A_k)$.
Проведём прямую $\lambda y = x$, где $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – больший корень уравнения $\lambda^2 = \lambda + 1$.
Спроецируем все вершины ломаной вдоль этой прямой на горизонтальную ось.

Лемма: полученное множество точек ограничено.

Доказательство леммы. Нетрудно понять, что точка с координатами (x, y) проецируется в точку с координатами $(x - \lambda y, 0)$. Для вектора $v = (a, b)$ будем обозначать $f(v) := a - \lambda b$ (f пропорциональна ориентированному расстоянию). Нужно найти такое число C, что $|f(P(A_k))| < C$ для любого начала A_k.

Сначала для всех k найдём $f(P(\varphi^k(1)))$.

Прежде всего, $P(0) = (0, 1)$ и $f(P(0)) = -\lambda$. Выразим $f(P(\varphi^{k+1}(1)))$ через $f(P(\varphi^k(1)))$. Пусть $P(\varphi^k(1)) = (a, b)$, тогда $P(\varphi^{k+1}(1)) = (a + b, a)$.

$$f(a + b, a) = a + b - \lambda a = (1 - \lambda)(a - \lambda b) = (1 - \lambda)f(a, b).$$

Здесь использовали соотношение $\lambda(1 - \lambda) = 1$.
По индукции получаем, что $f(P(\varphi^k(1))) = -\lambda(1 - \lambda)^k$.
Так как $-1 < 1 - \lambda < 0$, то можно найти сумму ряда

$$S = \lambda + \lambda|1 - \lambda| + \lambda|1 - \lambda|^2 + \lambda|1 - \lambda|^3 + \dots$$

Теперь покажем, что в качестве C можно взять S.

Рассмотрим какое-нибудь начало A_k. Пусть мы сумели разбить его на *различные* части так, что каждая часть – это $\varphi^k(1)$ для какого-нибудь k:

$$A_k = \varphi^{k_1}(1)\varphi^{k_2}(1)\dots\varphi^{k_n}(1),$$

где n – количество частей разбиения и все k_i различны. Тогда

$$f(P(A_k)) = f(P(\varphi^{k_1}(1))) + f(P(\varphi^{k_2}(1))) + \dots + f(P(\varphi^{k_n}(1))) =$$

$$= -\lambda(1 - l)^{k_1} - \lambda(1 - l)^{k_2} - \dots - \lambda(1 - l)^{k_n} < S.$$

Осталось научиться разбивать таким образом начальный кусок. Будем делать это индукцией по его длине, база очевидна.

Для A_k найдётся такое n, что $|\varphi^n(0)| \leqslant |A_k| < |\varphi^{n+1}|$ (знак модуля обозначает длину слова). В качестве первой части разбиения возьмём тогда $\varphi^n(0)$, то есть $A_k = \varphi^n(0)A'$. Теперь нужно как-то разбить на части A'.

Так как $\varphi^{n+1}(0) = \varphi^n(01) = \varphi^n(0)\varphi^n(1)$, то A' является началом слова $\varphi^n(1)$. Два случая: $n = 0$ и $n > 0$. В первом случае $\varphi^n(1) = 1$, во втором – это начало слова $\varphi^\infty(0)$, то есть можно применить переход индукции. Так как длина A' меньше, чем $|\varphi^n(0)|$, то все части, на которые будет разбито A_n, будут разные. Q.E.D.

Фрактал Рози для слова Фиббоначи.

Итак, множество точек ограничено. Его замыкание и будет *одномерным фракталом Рози* для подстановки Фиббоначи. Укажем его явно, пока без доказательства: это отрезок $[-1, \lambda]$. Движению по вершинам ломаной после проекции соответствует движение внутри этого отрезка, букве 0 соответствует прыжок вправо на 1, а букве 1 – прыжок влево на λ. Точка с координатой $\lambda - 1$ делит отрезок на правую и левую части. Прыжки из правой части отрезка совершаются налево, а из левой — направо, при этом прыжки на $+1$ всегда попадают правее нуля, а прыжки на $-\lambda$ — левее.

Если склеить концы отрезка, то получится окружность длины $1 + \lambda$, разбитая на две неравные дуги: большей соответствует 0, меньшей 1. По окружности прыгает точка, и последовательность частей, в которые она попадает, кодируется словом Фиббоначи.

Задачи.

Сдавать можно в любое время, мы живём в комнате 218-б.

Задача 1. Покажите, что если h – произвольная подстановка, то найдутся такие a (буква) и k (число), что $h^k(a)$ начинается с a.

Задача 2. Пусть $|U|_1$ – количество единиц в слове U. Докажите, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|_1}{n},$$

где A_n – определённые выше начальные куски слова Фиббоначи.

Задача 3. Покажите, что слова Фиббоначи и Триббоначи непериодичные.

Задача 4. Приведите явно пример бесконечного слова, которое не может быть получено с помощью подстановки.

Задача 5.

a) На прямой сидит кузнечик, который умеет делать прыжки двух типов: на 1 влево и на $\sqrt{2}$ вправо. Также в чёрный цвет покрашено несколько отрезков с суммарной длиной, меньшей $1 + \sqrt{2}$. Изначально кузнечик сидит внутри одного из чёрных отрезков, докажите, что он не может прыгать по отрезкам бесконечно долго (т.е. рано или поздно ему придётся прыгнуть на непокрашенный участок прямой.)

b) Внутри треугольника $\triangle ABC$ площади 1 выбрана точка X. На плоскости нарисован не обязательно выпуклый многоугольник площади $1,99$, внутри которого сидит кузнечик. Кузнечику разрешается прыгать на вектора, равные $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$ или $\overrightarrow{XC}$. Известно, что если нарисовать в любом месте плоскости круг любого радиуса, кузнечик может в него попасть за конечное число прыжков. Докажите, что рано или поздно кузнечик выпрыгнет из многоугольника (даже если не хочет).

Вторая лекция.

Части фрактала Рози.

Вернёмся к ступенчатой ломаной для слова Фиббоначи. Будем считать, что вершина ломаной соответствует букве 0, если выходящее из неё звено идёт вправо, и букве 1, если вверх.

Фрактал Рози (замыкание проекций всех вершин) делится на две части (возможно, пересекающиеся):

$$T = T_0 \cup T_1.$$

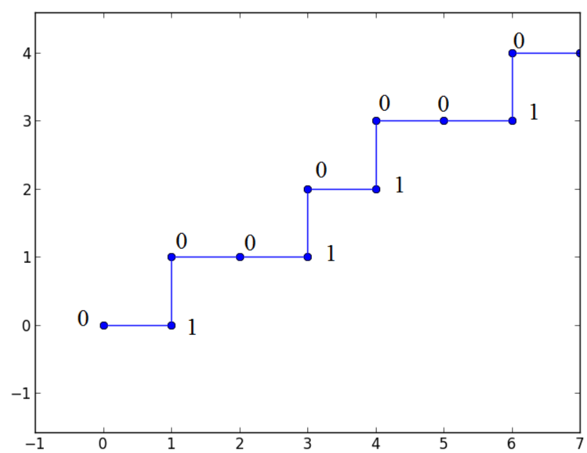


Рис. 2: Делим вершины ступенчатой ломаной на классы.

Вспомним угаданный фрактал вместе с его частями:

$$T' = [-1, \lambda], T'_0 = [-1, \lambda - 1], T'_1 = [\lambda - 1, \lambda].$$

(здесь T', а не T потому, что мы пока не умеем доказывать, что это настоящий фрактал Рози.)

Можно показать, что множества T'_0 и T'_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} T'_0 = (1 - \lambda)T'_0 \cup (1 - \lambda)T'_1 \\ T'_1 = (1 - \lambda)T'_0 + 1 \end{cases}$$

(Умножение множества на число a: каждая точка x переходит в ax. Прибавление числа a к множеству: каждая точка x переходит в $x + a$.)

В самом деле, при умножении на $1 - \lambda$ множество T'_0 переходит в отрезок $[\lambda - 2, \lambda - 1]$, а T'_1 – в $[-1, \lambda - 2]$.

Лемма. Части T_0 и T_1 должны удовлетворять этой же системе уравнений:

$$\begin{cases} T_0 = (1-\lambda)T_0 \cup (1-\lambda)T_1 \\ T_1 = (1-\lambda)T_0 + 1 \end{cases}$$

Доказательство.

Рассмотрим $\overline{T_0}$ и $\overline{T_1}$ – проекции вершин ломаной первого и второго типа соответственно. Покажем, что выполнены равенства

$$\begin{cases} \overline{T_0} = (1-\lambda)\overline{T_0} \cup (1-\lambda)\overline{T_1} \\ \overline{T_1} = (1-\lambda)\overline{T_0} + 1 \end{cases}$$

Из них всё будет следовать переходом к замыканию.

Запишем равенство $\overline{T_0} = \{f(P(A_k))|A_{k+1} = A_k0\}$ и аналогичное равенство $\overline{T_1} = \{f(P(A_k))|A_{k+1} = A_k1\}$.

напомним, что $f(.)$ — проекция на горизонтальную прямую, задаваемая формулой $f(x,y) = x - \lambda y$.

Так как $\varphi(\varphi^\infty(0)) = \varphi^\infty(0)$, слово Фиббоначи можно разбить на блоки 01 и 0:

$$\varphi^\infty(0) = 01|0|01|01|0|01|0|01|\dots$$

При этом при замене блоков $01 \to 0$ и $0 \to 1$ получится снова слово Фиббоначи. Префиксы A_n, после которых идёт 0, это в точности все префиксы, содержащие целое количество блоков. А префиксы, содержащие целое количество блоков – это в точности образы всех префиксов при подстановке φ. Таким образом, $\{A_n|A_{n+1} = A_n0\} = \{\varphi(A_k)\}$.

Равенство $A_{n+1} = A_n1$ значит то, что при вычёркивании из A_n последнего символа и декодировании (то есть замены $01 \to 0$, $0 \to 1$) получается префикс, после которого идёт 0.

Следовательно, $\{A_n|A_{n+1} = A_n1\} = \{\varphi(A_k)0|A_{k+1} = A_k0\}$.

Как было показано на предыдущей лекции, если точка (x,y) проецируется в t, то $(x+y,x)$ проецируется в $(1-\lambda)t$. Это значит, что для любого слова U

$$f(P(\varphi(U))) = (1-\lambda)f(P(U)).$$

Итак,

$$\overline{T_0} = \{f(P(\varphi(A_k)))\} = (1-\lambda)\{f(P(A_k))\} = (1-\lambda)\overline{T_0} \cup (1-\lambda)\overline{T_1},$$

$$\overline{T_1} = \{f(P(\varphi(A_k))) + f(P(0))|A_{k+1} = A_k0\} = (1-\lambda)\overline{T_0} + 1.$$

Q.E.D.

Метрика Хаусдорфа, сжимающие отображения и теорема Хатчинсона.

Утверждение: существует не более одной пары непустых компактов (T_1, T_2), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} T_0 = (1-\lambda)T_0 \cup (1-\lambda)T_1 \\ T_1 = (1-\lambda)T_0 + 1. \end{cases}$$

Мы докажем более общее утверждение, но сначала немного поговорим о сжимающих отображениях.

Пусть X – метрическое пространство с функцией расстояния $d(\cdot,\cdot)$. Отображение A пространства X в себя называется {сжимающим отображением с коэффициентом сжатия $m < 1$}, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ выполнено $d(A(x_1), A(x_2)) \leqslant md(x_1, x_2)$.

Пример: X – плоскость Oxy, A задаётся формулой $A(x, y) = (0.5y, 0.5x)$. Отображение A — сжимающее с коэффициентом 0.5 (а также 0.6, но не 0.4). Точка $(0, 0)$ является *неподвижной точкой* A, так как $A(0, 0) = (0, 0)$.

Ни у какого сжимающего отображения не могут быть две разные неподвижные точки, иначе расстояние между из образами равнялось бы расстоянию между ними. Если пространство является *полным*, то неподвижная точка ровно одна и является пределом точек $A^n(x_0)$ для любой начальной точки x_0.

Если D – множество, то $A(D)$ обозначает множество образов всех точек D при отображении A.

Для понимания дальнейшего можно считать, что – конечномерное пространство. Рассмотрим K_X – множество всех непустых компактов в пространстве X. Мы хотим превратить K_X в метрическое пространство.

Расстоянием $d(x, K)$ *от точки* x *до компакта* K называется минимальное из расстояний от точек K до точки X.

Пример: K – окружность на плоскости с центром в нуле радиуса 1, x имеет координаты $(0, 0.3)$. Тогда $d(x, K) = 0,7$.

Расстояние Хаусдорфа между двумя компактами K_1 и K_2:

$$d_H(K_1, K_2) = \max(\sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \sup_{x \in K_2} d(x, K_1)).$$

Иными словами, $d_H(K_1, K_2) \leqslant a$ тогда и только тогда, когда для любой точки первого компакта найдётся точка второго на расстоянии не большем, чем a, и для любой точки второго компакта найдётся точка первого на расстоянии не большем, чем a.

Это на самом деле расстояние:

1. Очевидно, что расстояние между двумя одинаковыми множествами равно нулю. С другой стороны, если $d_H(K_1, K_2) = 0$, то для любой точки первого множества найдётся совпадающая с ней точка второго и наоборот.

2. Симметричность, очевидно, выполнена.

3. Неравенство треугольника. Пусть $d_H(K_1, K_2) = a$ и $d_H(K_2, K_3) = b$. Возьмём любую точку x_1 первого компакта. Найдётся $x_2 \in K_2$ такая, что $d(x_1, x_2) \leqslant a$, после чего выберем $x_3 \in K_3$, для которой $d(x_2, x_3) \leqslant b$. Значит, $d(x_1, x_3 \leqslant a + b)$.

Теорема Хатчинсона. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – сжимающие отображения пространства X с коэффициентом сжатия $m \leqslant 1$. Тогда условию

$$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$$

удовлетворяет не более одного компактного множества K.

Доказательство. Рассмотрим преобразование F пространства K_X, заданное формулой

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$$

и покажем, что оно сжимающее с тем же коэффициентом m, тогда единственность решения будет следовать из того, что у сжимающего отображения не более неподвижной точки.

В самом деле, пусть $d_H(K_1, K_2) = a$. Покажем, что $d_H(F(K_1), F(K_2)) \leqslant ma$. Возьмём произвольную точку $x_1 \in F(K_1)$, она должна принадлежать хотя бы одному из множеств $f_i(K_1)$.

Пусть $x_1 = f_i(x_1')$. Тогда найдётся $x_2' \in K_2$ такая, что $d(x_1, x_2) \leqslant a$. Значит, $x_2 := f_i(x_2') \in F(K_2)$ и $d(x_1, x_2) \leqslant ma$. Q.E.D.

Замечание. Показав полноту пространства K_X, можно доказать, что решение такого уравнения всегда существует. Обычно решения выглядят как типичные фракталы.

Всё бы хорошо, но у нас не одно уравнение, а система из двух уравнений на два множества T_1 и T_2. Выручит метрическое пространство $K_X \times K_X$ – множество всех упорядоченных пар непустых компактов (K_1, K_2). Расстояние в нём измеряется так:

$$d\left((K_1, K_2), (K_3, K_4)\right) = \max(d_H(K_1, K_3), d_H(K_2, K_4)).$$

Полностью аналогично доказывается, что правая часть такой системы уравнений задаёт на этом пространстве сжимающее отображение.

Матрица подстановки.

Каждой подстановке h над алфавитом из n букв можно сопоставить матрицу A_h размера $n \times n$. На пересечении строки i и столбца j в матрице A_h стоит количество букв i в слове $h(j)$.

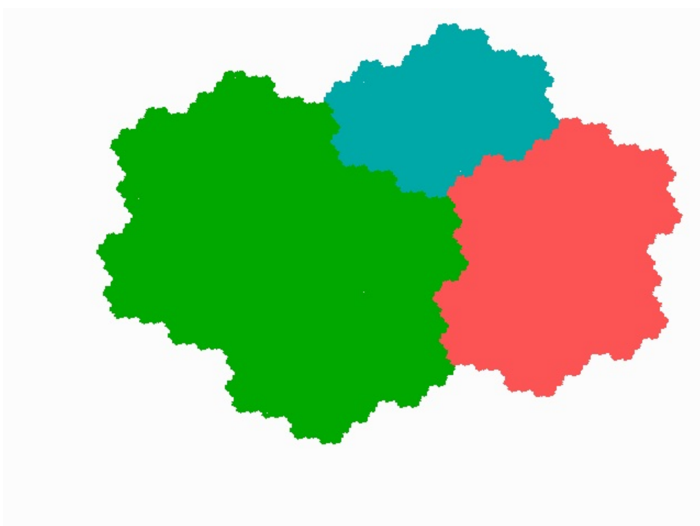
Для любого слова U верно равенство $A_h(P(U)) = P(h(U))$.

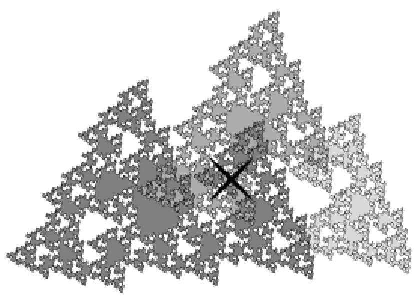
Если вектор v, матрица A и число μ удовлетворяют равенству $Av = \mu v$, то v называется *собственным вектором* матрицы A, а μ – соответствующим *собственным значением.*

Мы будем рассматривать только *унимодулярные подстановки Пизо* – такие подстановки h, что матрица A_h имеет определитель 1, одно собственное значение, большее 1 и остальные (различные) собственные значения с модулем меньшим, чем 1.

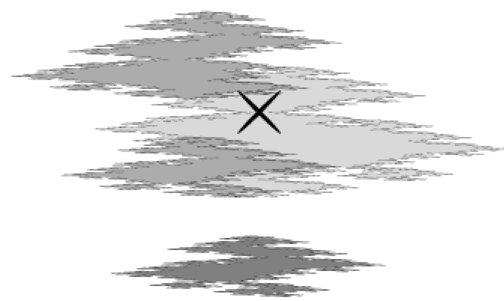
Если взять U – начало слова $h^\infty(0)$ большой длины, то вектор $P(U)$ будет направлен почти в ту же сторону, что и собственный вектор матрицы A, отвечающий наибольшему собственному значению.

Картинки.

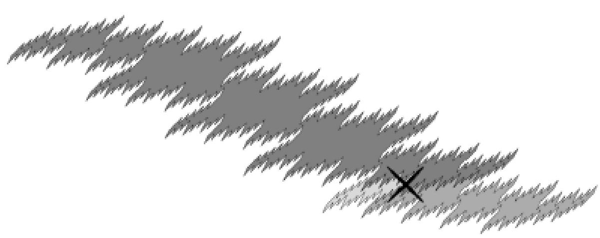




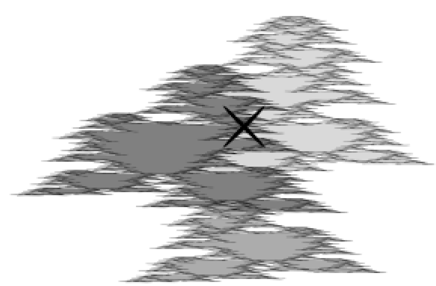
(a) $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 31, 3 \mapsto 1$



(b) $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 23, 3 \mapsto 31223$



(c) $1 \mapsto 21111, 2 \mapsto 31111, 3 \mapsto 1$



(d) $1 \mapsto 123, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 31$