Лекция 3.

Матрица подстановки.

Каждой подстановке h над алфавитом из n букв можно сопоставить матрицу M_h размера $n \times n$. На пересечении строки i и столбца j в матрице M_h стоит количество букв i в слове $h(j)$.

Пример: для подстановки Фиббоначи $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 0$ матрица

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

для подстановки Триббоначи $\phi(1) = 12$, $\phi(2) = 13$, $\phi(3) = 1$ матрица

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица подстановки описывает, как преобразуются под действием подстановки вектора вхождений подслов:

$$M_h(P(U)) = P(h(U))$$

для любого слова U.

Например, $P(00111) = (2, 3)$ и

$$P(\varphi(00111)) = P(0101000) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Обычно координаты вектора записывают в столбик для того, чтобы он умножался как матрица $1 \times n$; иногда мы будем писать в строчку, и надеемся, что это не приведёт к путанице.

Собственные вектора.

У матрицы $n \times n$ есть геометрический смысл: матрице соответствует линейный оператор, то есть отображение из n-мерного векторного пространства в себя.

Чтобы узнать, куда переходит под действием матрицы M вектор $\overrightarrow{v}$, нужно найти произведение

$$M \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

где v_i – координаты вектора $\overrightarrow{v}$.

Так, матрицу подстановки можно применять к векторам с целыми, но также вещественными и комплексными коэффициентами.

Если вектор v, матрица M и число μ удовлетворяют равенству $Av = \mu v$, то v называется *собственным вектором* матрицы M, а μ – соответствующим *собственным значением.*

Утверждение. У матрицы M есть **ненулевой** собственный вектор с собственным значением 0 тогда и только тогда, когда она вырождена.

Доказательство. Различные определения вырожденности матрицы проходятся в первом семестре почти любого вуза, нам удобно такое: *матрица называется вырожденной, если можно сложить вектора её столбцов в ненулевыми коэффициентами так, чтобы получился ноль.*

При использовании такого определения утверждение становится почти тавтологичным, поскольку $M \cdot \overrightarrow{v}$ – это и есть вектор, полученный линейной комбинацией столбцов матрицы. И найти коэффициенты вектора $\overrightarrow{v}$ можно методом Гаусса (также проходится в первом семестре).

Возникает вопрос, как искать ненулевые собственные значения?

Для этого перепишем условие того, что вектор $\overrightarrow{v}$ является собственным:

$$M \cdot \overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{v} \Leftrightarrow (M - \mu I) \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

μI — это матрица, на главной диагонали которой стоят числа μ, а в остальных клетках — нули, то есть, например, для матрицы подстановки Фиббоначи

$$M_\varphi - \mu I = \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить, при каких μ матрица $M - \mu I$ вырождена, удобно пользоваться другим, равносильным определением: *матрица вырождена, если её определитель равен нулю.* Если не знаете, что такое определитель, почитайте в Википедии, а мы лишь дадим формулы для матриц 2×2 и 3×3:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1};$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}.$$

Если расписать выражение $\det(M - \mu I) = 0$, то возникнет уравнение на μ степени n. В общем случае у него есть n комплексных решений, и можно показать, что если все решения (то есть собственные числа) различные, то соответствующие собственные вектора линейно независимы.

Мы будем рассматривать только *унимодулярные подстановки Пизо* – такие подстановки h, что матрица M_h имеет определитель 1, одно собственное значение, большее 1 и остальные (различные ненулевые) собственные значения с модулем меньшим, чем 1.

Матрица подстановки Пизо.

Рассмотрим унимодулярную подстановку Пизо ψ над n-буквенным алфавитом $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ и её матрицу M_ψ.

В пространство $\mathbb{R}^n$ есть $\overrightarrow{v}$ — вектор, соответствующий наибольшему собственному значению μ матрицы M_ψ, и гиперплоскость Π размерности $n-1$, порождённая остальными собственными векторами.

Давайте посмотрим, как устроена Π, на примере подстановки Триббоначи.

У матрицы

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

собственные значения μ_1, μ_2, μ_3 — корни уравнения

$$\mu^3 - \mu^2 - \mu - 1 = 0.$$

Вещественный корень $\mu_1 \approx 1,8392$, а два оставшихся корня — комплексно сопряжённые числа: $\mu_{2,3} \approx -0,4196 \pm 0,606i$.

Нетрудно проверить, что для любого корня μ вектор $(\mu^2, \mu, 1)$ является собственным:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^2 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^2 + \mu + 1 \\ \mu^2 \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \mu^2 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак,

$$\overrightarrow{v} \approx \begin{pmatrix} 3,38298 \\ 1,839 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С другими собственными векторами ситуация сложнее, так как соответствующие вектора имеют комплексные координаты и не лежат в $\mathbb{R}^3$. Бороться с этим будет так: давайте рассматривать M_ϕ как оператор в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Элементы $\mathbb{C}^3$ — тройки комплексных чисел, а $\mathbb{R}^3$ расположено в нём как тройки вещественных чисел (обратите внимание, что так как в $\mathbb{C}^3$ вектора можно умножать не только на вещественные числа, но и на комплексные, то $\mathbb{R}^3$ не является линейным подпространством.)

Подпространство $\overline{\Pi}$ в $\mathbb{C}^3$, порождённое $\overrightarrow{v_2} = (\mu_2^2, \mu_2, 1)$ и $\overrightarrow{v_3} = (\mu_3^2, \mu_3, 1)$ — это множество всех векторов вида $\lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3}$, где λ_2 и λ_3 — произвольные комплексные числа.

Оператор M_ϕ сохраняет $\overline{\Pi}$:

$$\overrightarrow{x} \in \overline{\Pi} \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} \Longrightarrow M_\phi\overrightarrow{x} = \mu_2\lambda_2\overrightarrow{v_2} + \mu_3\lambda_3\overrightarrow{v_3} \in \overline{\Pi}.$$

У векторов $\overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$ координаты комплексно сопряжены (это, кстати, не случайность). Поэтому у их суммы $\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ все координаты вещественные, а у разности $\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}$ — чисто мнимые. Таким образом, вектора $\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}$ и $i(\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_3})$ лежат в $\mathbb{R}^3$, в $\overline{\Pi}$ и линейно независимы. Двумерное пространство $\mathbb{R}^3$, порождённое ими, и назовём Π.

Понятно, как M_ϕ действует на $\overrightarrow{v}$: растягивает его в μ раз.

M_ϕ сохраняет Π как пересечение $\overline{\Pi}$ и $\mathbb{R}^3$. Хочется сказать, что на Π этот оператор действует, как сжимающее отображение, но для этого нужно правильно определить расстояние между точками.

Пусть B_1 и B_2 — точки, лежащие в Π. Снова посмотрим на $\mathbb{C}^3$, в нём вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$ выражается через $\overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$ с какими-то комплексными коэффициентами: $\overrightarrow{B_1B_2} = \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3}$. Скажем, что расстояние $d(B_1, B_2) = |\lambda_2| + |\lambda_3|$.

Несложно проверить, что расстояние между $M_\phi(B_1)$ и $M_\phi(B_2)$ равняется $|\lambda_2\mu_2| + |\lambda_3\mu_3|$, что меньше, чем $d(B_1, B_2)$, т.к. $|\mu_{1,2}| < 1$.

Вернёмся к произвольной подстановке. Пространство Π строится так же, как для подстановки Триббоначи: это те точки внутри комплексного пространства $\overline{\Pi}$, у которых все координаты – действительные числа.

Оператор M_ψ растягивает $\overrightarrow{v}$ в μ раз, а из того, что у матрицы единичный определитель, следует, что в Π $(n-1)$-мерные объёмы всех фигур уменьшаются в μ раз. Также на Π при правильном определении расстояния M_ψ является сжимающим, коэффициент сжатия — модуль второго по величине собственного значения оператора.

Любой вектор $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представляется в виде суммы $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{b}$, где $\overrightarrow{b} \in \Pi$. Для вектора $\overrightarrow{x}$ вектор $\overrightarrow{b}$ является его *проекцией на* Π *вдоль* $\overrightarrow{v}$. Число a из этого разложения назовём *высотой* вектора x. Проекцию $\overrightarrow{x}$ на Π будем обозначать $\pi(\overrightarrow{x})$, а его высоту

— $H(\overrightarrow{x})$. Полезное наблюдение: для любых двух векторов $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ выполнено $H(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}) = H(\overrightarrow{x_1})+H(\overrightarrow{x_1})$ и $H(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}) = H(\overrightarrow{x_1})+H(\overrightarrow{x_1})$

Таким образом, для любого вектора $\overrightarrow{x}$ есть разложение $\overrightarrow{x} = H(\overrightarrow{x})\overrightarrow{v} + \pi(\overrightarrow{x})$, при этом $M_\psi(\overrightarrow{x}) = \mu H(\overrightarrow{x})\overrightarrow{v}) + M_\psi(\pi(\overrightarrow{x}))$.

Давайте теперь докажем что-нибудь, используя то, что M_ψ – не абы какая матрица, а матрица подстановки Пизо.

Лемма 1. У вектора $\overrightarrow{v}$ все координаты одного знака, а для любого базисного вектора e_i его высота $H(e_i) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность слов:

$$u_0 = i,\ u_1 = \psi(i),\ u_2 = \psi(\psi(i)), \dots$$

Можно показать, что их длины неограниченно возрастают и, начиная с некоторого момента, эти слова будут содержать все буквы хотя бы по одному разу, т.е. все координаты $P(e_i)$ положительные.

С другой стороны, $P(u_k) = M_\psi^k(e_i)$. Используя разложение пространства на v и Π, посмотрим, как степени M_ψ действуют на e_i:

$$e_i = H(e_i)\overrightarrow{v} + \pi(\overrightarrow{e_i}),$$

$$M_\psi^k(e_i) = \mu^k H(e_i)\overrightarrow{v} + M_\psi^k(\pi(\overrightarrow{e_i})).$$

Длины векторов $M_\psi^k(\pi(\overrightarrow{e_i}))$ стремятся к нулю (сжимающее отображение), поэтому, если какая-нибудь координата $H(\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{v}$ меньше либо равна нулю, то соответствующая координата $P(u_k)$ для достаточно большого k будет меньше единицы. Получится противоречие, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. Координаты $a_1, \dots, a_n$ вектора $\overrightarrow{v}$ *рационально независимы*, то есть не существует такой их комбинации $b_1a_1 + \dots + b_na_n = 0$ с рациональными не всеми нулевыми b_i.

Доказательство. От противного: можно считать, что все b_i целые, выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ собственный базис $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1}, \dots \overrightarrow{v_n}$ матрицы M_ψ. Запишем квадратную матрицу V, в столбцах которой записаны координаты этих векторов

$$V = \begin{pmatrix} a_1 & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ a_2 & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наконец, рассмотрим произведение

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot M_\psi^k \cdot V \cdot V^{-1}.$$

Это должен быть вектор-строка с вещественными целыми коэффициентами (так как все коэффициенты матриц M_ψ^k и $V \cdot V^{-1}$ целые).

С другой стороны покажем, что при достаточно больших k все коэффициенты этого вектора имеют значение с модулем меньше 1. Отсюда будет следовать, что вектор нулевой и, следовательно, все b_i также нули.

Для этого покажем, что для любого ε при достаточно больших k все коэффициенты вектора

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot M_\psi^k \cdot V$$

будут меньше ε.

В самом деле, в первой клетке произведения будет стоять

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \mu^k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

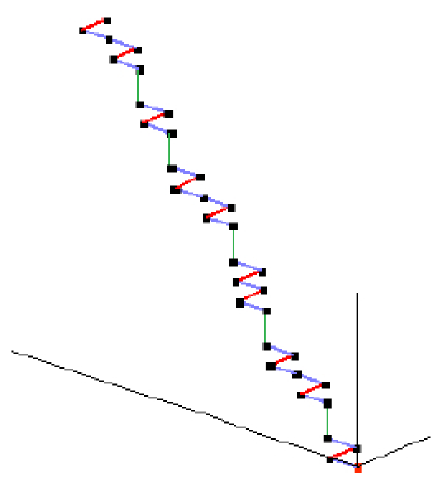
В клетке с номером $i > 1$ будет стоять

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \mu_i^k \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix},$$

где μ_i – соответствующее собственное значение. Так как $|\mu_i| < 1$, при достаточно больших k значение этого выражения будет $< \varepsilon$.

Многомерный фрактал Рози и его ограниченность.

Построим в $\mathbb{R}^n$ для слова $\psi^\infty(1)$ ломаную-«лесенку» так же, как для слова Фиббоначи: каждой букве соответствует свой единичный базисный вектор, ломаная выходит из нуля, и k-е звено ломаной определяется k-й буквой слова $\psi^\infty(1)$.



Введём (напомним) обозначение: A_k – префикс слова $\psi^\infty(1)$ длины k. Тогда все вершины ломаной – это точки $P(A_k)$.

Разобьём множество V всех вершин ломаной на части V_i, вершина принадлежит V_i тогда и только тогда, когда ломаная из неё идёт по вектору e_i.

Тогда фрактал Рози T – это замыкание проекции $\pi(V)$ всех вершин ломаной на гиперплоскость Π, а части фрактала T_i – замыкания проекций $\pi(V_i)$.

$T = \cup_i V_i$, при этом части, вообще говоря, могут перекрываться. В случае слова Фиббоначи пересечение частей – одна точка.

Утверждение. Множество T ограничено.

Доказательство. На Π можно так мерить длины векторов, что для некоторого $m < 1$ для любого вектора $\overrightarrow{x} \in \Pi$ выполнено $\|M_\varphi(\overrightarrow{x})\| \leqslant m\|\overrightarrow{x}\|$.

Нужно найти такое C, что для всех k выполнено $\|\pi(P(A_k))\| < C$.

Будем говорить, что конечное слово имеет ранг k, если оно имеет вид $\psi^k(i)$ для какой-то буквы i.

Пусть N — наибольшая длина из длин слов $\psi(i)$.

Тогда любое слово ранга k разбивается на несколько (не более N) слов ранга $k-1$:

$$\psi(2) = 2311 \Longrightarrow \psi^k(2) = \psi^{k-1}(2)\psi^{k-1}(3)\psi^{k-1}(1)\psi^{k-1}(1)).$$

Слово A_k является началом $\psi^M(1)$ для некоторого M. Слово $\psi^M(1)$ состоит из не более, чем N кусков ранга $M-1$, значит, $A_k = U_1U_2\cdots U_tA'$, где $t < N$ и A' является началом какого-то слова ранга $M-1$. Делая аналогичный процесс с A' и так далее, получим, что A_k разбивается на части: сначала сколько-то (не больше N) частей ранга M, потом не более N частей ранга $M-1$ и так далее. Пусть R — наибольшая из длин $\pi(P(i))$, то есть из длин $\pi(e_i)$.

Тогда для любых i и t выполнено $\pi(P(\psi^t(i))) \leqslant m^tR$, то есть чем больше ранг слова, тем меньше (экспоненциально) длина соответствующего вектора.

$$\|\pi(P(A_i))\| = \|\pi(P(U_1U_2U_3\cdots))\| \leqslant \|\pi(P(U_1))\| + \|\pi(P(U+2))\| + \cdots \leqslant$$
$$\leqslant Nm^MR + Nm^{M-1}R + \cdots + NR \leqslant \frac{NR}{1-m}.$$

Что и требовалось доказать. Другая интерпретация этого факта: множество V расположено рядом с прямой, порождённой вектором v.

Фрактал Рози как аттрактор, уравнение на части.

Основная формула:

$$T_i = \bigcup_j \bigcup_{\psi(j)=X_k^{(j)}jY_k^{(j)}} M_\psi(T_j) + \pi(P(X_k^{(j)}))$$

Объясним, что здесь написано, на примере подстановки

$$\psi(1) = 112,\ \ \psi(2) = 112,\ \ \psi(3) = 1.$$

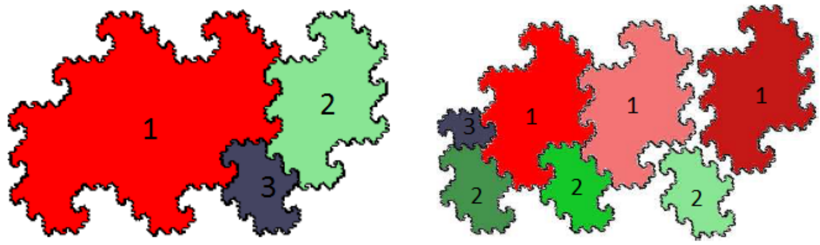
Буква 1 встречается в правых частях подстановки 5 раз:

1. В $\psi(1)$ после пустого префикса. Этой части соответствует множество $M_\psi(T_1)$.

2. В $\psi(1)$ после префикса 1. Этой части соответствует множество $M_\psi(T_1) + \pi(e_1)$.

3. В $\psi(2)$ после пустого префикса. Этой части соответствует множество $M_\psi(T_2)$.

4. В $\psi(1)$ после префикса 1. Этой части соответствует множество $M_\psi(T_2) + \pi(e_1)$.



5. В $\psi(3)$ после пустого префикса. Этой части соответствует множество $M_\psi(T_3)$.

$M_\psi(T_i)$ – это сжатая и повёрнутая фигура T_i. Таким образом, T_1 состоит из двух уменьшенных копий T_2, двух уменьшенных копий T_2 и одной уменьшенной копии T_3. Эти сдвинутые уменьшенные копии на картинке не перекрываются, но мы это пока не умеем доказывать. Кстати, на рисунке не отмечен ноль. Где он примерно находится? Попробуйте также нарисовать проекции базисных векторов $\pi(e_1)$, $\pi(e_2)$, $\pi(e_3)$.

Буква 2 встречается в $\psi(1)$ после префикса 11, ей соответствует множество $M_\psi(1) + \pi(2e_1)$. А букве 3 соответствует множество $M_\psi(2) + \pi(2e_1)$.

Вообще, выражение $\psi(j) = X_k^{(j)} j Y_k^{(j)}$ следует понимать так: i – k-я по счёту буква в $\psi(j)$ (могут быть и другие буквы i в этом слове), перед буквой i написано слово $X_k^{(j)}$, а после – $Y_k^{(j)}$. Слово $X_k^{(j)}$ определяет, на какой вектор нужно сдвинуть фигурку $M_\psi(T_j)$.

Доказательство формулы.

На второй лекции было похожее, кстати.

Формула следует из аналогичного соотношения для множеств V_i:

$$V_i = \bigcup_j \bigcup_{\psi(j)=X_k^{(j)} j Y_k^{(j)}} M_\psi(V_j) + (P(X_k^{(j)}))$$

Эти множества — счётные дискретные множества целых точек в $\mathbb{R}^n$, а соответствующие T_i получаются из них проекцией $\pi(\cdot)$ и замыканием.

после того, как мы докажем формулу для V_i, останется применить проекцию π ко всем частям выражения и вспомнить, что такое замыкание.

Итак: фиксируем i, нас интересует подмножество V_i точек ломаной . Это в точности множество векторов $P(A_k)$ для всех префиксов A_k бесконечного слова, после которых идёт буква i. Опишем множество всех таких префиксов рекурсивно.

Слово $\psi^\infty(1)$ можно разрезать на блоки – правые части подстановки ψ, вот пример для недавно упоминавшейся подстановки

$$\psi(1) = 112, \;\; \psi(2) = 112, \;\; \psi(3) = 1 :$$

$$112112113112112113112112\dots = (112)(112)(113)(112)(112)(113)(112)(112)(1)\dots$$

Тогда позиции всех букв i в слове $\psi^\infty(0)$ определяются номером блока, в котором они находятся, и позицией в блоке. Все вхождения можно разделить на несколько типов, так, в этом примере вхождения буквы 1 делятся на 5 типов вхождений: **1**12, 1**1**2, **1**13, 1**1**3, **1**.

Значит, V_1 в этом примере является объединением пяти множеств. Посмотрим, например, на множество, соответствующее типу 1**1**2. Все соответствующие префиксы A_k имеют вид $\psi(A_{k'})1$, причём после $A_{k'}$ в $\psi^\infty(1)$ должна идти снова единица (обратное тоже верно).

Значит, вершина $P(A_{k'}) \in V_1$. А операция «применить ψ и приписать справа 1» меняет вектор слова по формуле $M_\psi(\cdot) + \overrightarrow{e_1}$.

Советуем ещё немного помедитировать над формулой.

Заметим, что в правых частях стоят сжимающие отображения П. Применимы все рассуждения из предыдущих лекций и множества T_i этой формулой определяются однозначно.

Площадь фрактала Рози.

Правильнее говорить мера, а не площадь. Но можно считать, что речь идёт об обычной площади. Неявно мы будем пользоваться фактом, что для любого ограниченного замкнутого множества мера Лебега корректно определена.

Теорема Кронекера, одна из формулировок. Пусть в n-мерном пространстве даны $n+1$ вектор $\overrightarrow{x_i}$. Будем говорить, что *целочисленные комбинации набора векторов всюду плотны*, если для любого шара B в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует вектор $a_1\overrightarrow{x_1}+\cdots+a_{n+1}\overrightarrow{x_i}$ с целыми $a_1,\ldots,a_{n+1}$, попадающий в шар B.

Утверждение теоремы: целочисленные комбинации набора всюду плотны тогда и только тогда, когда не существует такого ненулевого вектора x, что его скалярные произведения со всеми векторами набора рациональны.

Доказательство можно найти в интернете или спросить у меня. Ещё с какой-то вероятностью я допишу его в следующую версию конспекта.

Давайте применим эту теорему к n базисным векторам $\overrightarrow{e_i}$ и к собственному вектору $\overrightarrow{v}$, точнее докажем, что его можно умножить на какое-нибудь число λ так, чтобы целочисленные комбинации набора $\overrightarrow{\lambda v},\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ были всюду плотны.

Пусть нашёлся такой $\overrightarrow{x}$, что его скалярное произведение со всеми векторами набора рационально. Тогда все его координаты должны быть рациональными числами.

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{x}$ не может в таком случае равняться нулю: это влекло бы рациональную зависимость координат вектора v.

Значит, условие, что скалярное произведение $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda v})$ не может быть рациональным, запрещает счётное число различных лямбд. А так как всего векторов $\overrightarrow{x}$ со всеми рациональными коэффициентами счётное число, то какое-нибудь значение для λ мы подобрать сможем.

А отсюда проистекает замечательное следствие: целочисленные комбинации векторов $\pi(\overrightarrow{e_i})$ всюду плотны в П. Более того, пользуясь тем, что координаты $\overrightarrow{v}$ положительны, можно показать, что коэффициенты в комбинации можно выбирать ещё и неотрицательными.

Хотя всё дальнейшее переносится на любую размерность, давайте для наглядности считать, что алфавит трёхбуквенный и П – двумерная плоскость.

На плоскости П есть три вектора $\pi(\overrightarrow{e_1})$, $\pi(\overrightarrow{e_2})$, $\pi(\overrightarrow{e_3})$.

Отложим их от точки O, концы векторов образуют треугольник $X_1X_2X_3$.

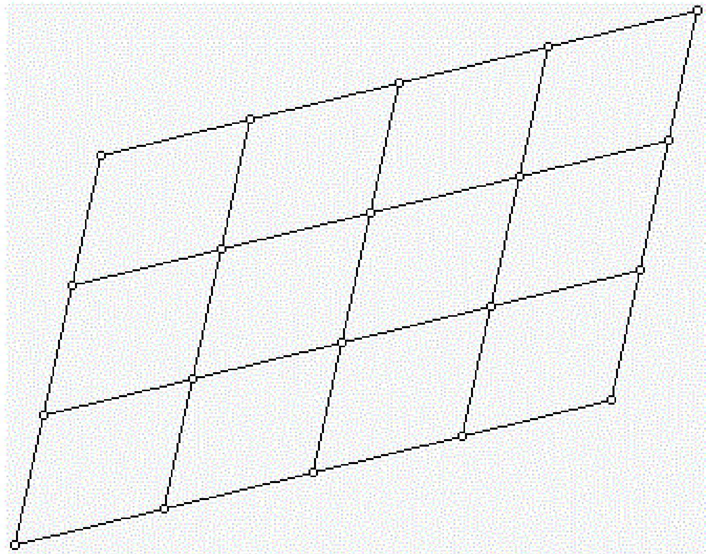
Утверждение. Мера фрактала Рози не меньше, чем удвоенная площадь треугольника $\triangle X_1X_2X_3$.

Доказательство. Рассмотрим E — множество векторов вида $a_1\pi(\overrightarrow{e_1})+a_2\pi(\overrightarrow{e_2})+a_3\pi(\overrightarrow{a_3})$ с целыми a_1, a_2, a_3 такими, что $a_1+a_2+a_3=0$ (иначе: целочисленные комбинации векторов $\overrightarrow{X_1X_2}$ и $\overrightarrow{X_1X_3}$).

Концы векторов из E будут расположены в узлах параллелограммной решётки, как на рисунке. Каждый маленький параллелограмм будет иметь площадь $2S(\triangle X_1X_2X_3)$.

Рассмотрим всевозможные сдвиги множества T на вектора из E. Если мы докажем, что эти сдвиги покрывают всю плоскость П, то тем самым докажем утверждение задачи.

Пусть B – маленький круг в П. Докажем, что какой-нибудь из таких сдвигов T пересекается с B. Как мы знаем, существует неотрицательная целочисленная комбинация $\overrightarrow{a}=a_1\pi(\overrightarrow{e_1})+a_2\pi(\overrightarrow{e_2})+a_1\pi(\overrightarrow{e_1})$, попадающая в B.



Рассмотрим первые $N = a_1 + a_2 + a_3$ буквы слова $\varphi^\infty(1)$. Этому слову соответствует некий вектор вида $\overrightarrow{b} = b_1\pi(\overrightarrow{e_1}) + b_2\pi(\overrightarrow{e_2}) + b_1\pi(\overrightarrow{e_1})$, где $b_1 + b_2 + b_3 = N$.

Легко видеть, что $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \in E$, при этом $\overrightarrow{b} \in T$. Значит, если T перенести на $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, то у полученной фигуры будет точка a внутри B.

Осталось доказать, что каждая точка Π принадлежит какой-нибудь фигуре вида $T + \overrightarrow{x}$ при $\overrightarrow{x} \in E$.

Пусть $Y \in \Pi$. Рассмотрим последовательность кружочков B_i с центром в Y и с радиусами $\frac{1}{i}$. Каждый из этих кругов пересекается с одной из сдвинутых копий T, а из ограниченности T следует, что какое-то множество $T + \overrightarrow{x}$ пересекает бесконечное число кругов B_i. Следовательно, Y – предельная точка множества $T + \overrightarrow{x}$, и принадлежит ему в силу замкнутости фрактала Рози.

Площади частей фрактала.

Вспомним формулу

$$T_i = \bigcup_j \bigcup_{\psi(j)=X_k^{(j)} j Y_k^{(j)}} M_\psi(T_j) + \pi(P(X_k^{(j)})).$$

Пусть s_i — мера T_i. Мы можем записать неравенство «мера объединения не больше объединения мер»:

$$s_i \leqslant \sum_j M_{\psi(j,i)} \frac{s_j}{\mu},$$

где $M_{\psi(j,i)}$ — число в j—м столбце i-й строке M_ψ. Число μ — максимальное собственное значение — является коэффициентом сжатия меры в Π.

Перепишем формулу по-другому.

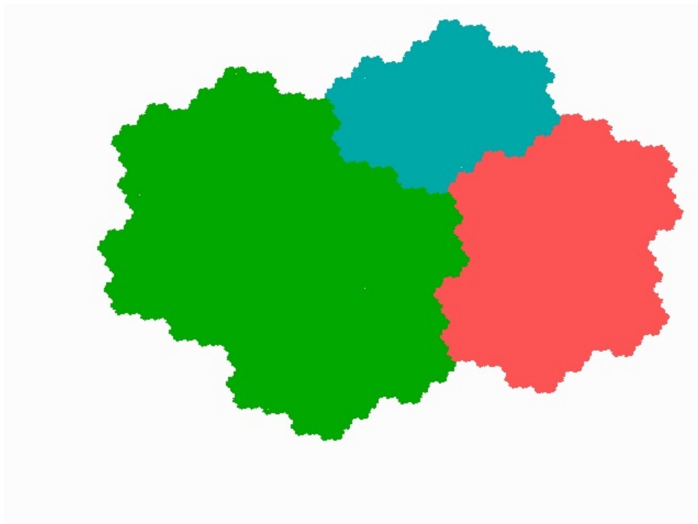
$$M_\psi \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \sum_i \delta_i \overrightarrow{e_i},$$

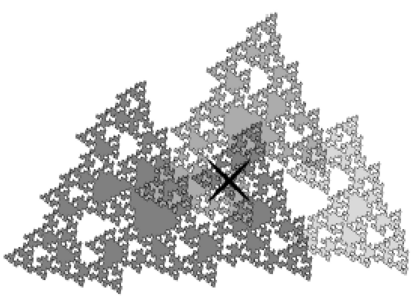
где $\delta_i \geqslant 0$.

Из того, что для любого вектора $\overrightarrow{s}$ выполнено $H(M_{\psi(\overrightarrow{s})}) = \mu H(\overrightarrow{s})$ и $H(\overrightarrow{e_i}) > 0$ следует $\delta_i = 0$ для любого i.

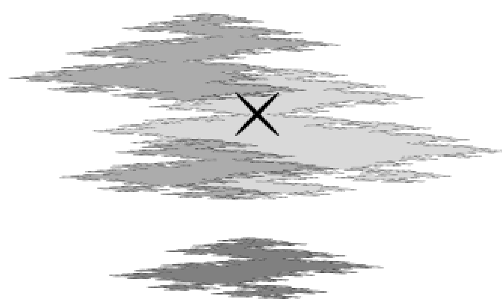
Так как все неравенства обращаются в равенства, то все множества в правых частях формулы не пересекаются, а также меры частей пропорциональны координатам собственного вектора $\overrightarrow{v}$.

Картинки.

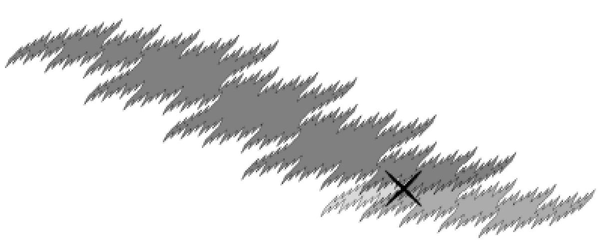




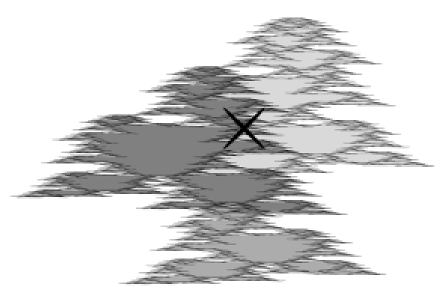
(a) $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 31, 3 \mapsto 1$



(b) $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 23, 3 \mapsto 31223$



(c) $1 \mapsto 21111, 2 \mapsto 31111, 3 \mapsto 1$



(d) $1 \mapsto 123, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 31$