Задачный конспект курса “Рациональные приближения действительных чисел” В. А. Клепцына, часть 1

20 июля 2014 г.

1 Ряды Фарея

Выберем какое-нибудь натуральное число n, и выпишем все несократимые дроби из отрезка $[0,1]$, знаменатель которых не превосходит n. При $n=3$, мы получаем

$$0=\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}=1.$$

Определение 1. *n-ый ряд Фарея* (или *последовательность Фарея порядка n*) это последовательность $\{\frac{a_{i;n}}{b_{i;n}}\}$ всех несократимых дробей из отрезка $[0,1]$, знаменатель которых не превосходит n, упорядоченных по возрастанию.

Задача 1. Выпишите ряды Фарея для всех $n \le 5$.

Задача 2. Отметьте внутри треугольника с вершинами $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,5)$ все целочисленные точки с взаимно простыми координатами. Как результат связан с предыдущей задачей?

Задача 3. a) Пусть $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ — две последовательные дроби в n-м ряду Фарея. Чему равна площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (c,d), (a,b)? (**Подсказка:** примените формулу Пика.)

b) Площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (a,b) и (c,d) равна половине модуля величины

$$\det\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)=ad-bc.$$

c) Пусть $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ — две последовательные дроби в n-м ряду Фарея. Тогда

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{1}{bd}.$$

Определение 2. *Медиантом* двух несократимых дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Задача 4. Если $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ — две дроби, $b,d>0$, то

$$\frac{c}{d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a}{b}.$$

Указание. Если хотите обойтись без выкладок — подумайте, какую фигуру образуют точки $(0,0)$, (a,b), $(a+c,b+d)$, (c,d)?

Задача 5. Если при переходе от $(n-1)$-го ряда Фарея к n-му между дробями $\frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b}$ добавляется новая, то эта новая — их медиант.

Задача 6. Любая дробь в ряде Фарея — медиант своих соседей.

Указание. Осторожно! Эта задача не совпадает с предыдущей (хотя, конечно, её использует).

2 Приближаемость и не-приближаемость

Определение 3. Иррациональное число $x \in \mathbb{R}$ называется *диофантовым*, если найдутся такие $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^k}.$$

В противном случае, оно называется *лиувиллевым*.

Задача 7. Пусть иррациональное число $x \in [0, 1]$ заключено в интервале $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ между двумя соседними дробями в n-м ряде Фарея. Что можно сказать о точности приближения x концами этого отрезка? Используйте полученные оценки, чтобы доказать теорему Дирихле о приближении (см. ниже).

Теорема 1 (Теорема Дирихле)**.** *Для любых $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ существуют $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \leq n$, такие, что*

$$|qx - p| < \frac{1}{n_0}.$$

Первый пункт следующей задачи показывает, что заключение теоремы Дирихле сильно улучшить для всех дробей нельзя:

Задача 8. a) Докажите, что для любых $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{10q^2}.$$

b) Пусть иррациональное число x — корень многочлена $P(x)$ степени k с целыми коэффициентами. Докажите, что найдётся константа $c > 0$, такая, что

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^k}.$$

Задача 9. Все иррациональные алгебраические числа — диофантовы.

Задача 10. Число $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ лиувиллево, и потому трансцендентно.