Случайные метрики на сфере

Виктор Клепцын

CNRS, Institute of Mathematical Research of Rennes, University of Rennes 1

Летняя школа «Современная математика», Ратмино, Дубна

Типы предельного поведения

Типы предельного поведения

- Закон больших чисел:

Типы предельного поведения

- Закон больших чисел:
- Центральная предельная теорема:

Типы предельного поведения

- Закон больших чисел: стремление к конкретному пределу
- Центральная предельная теорема:

Типы предельного поведения

- Закон больших чисел: стремление к конкретному пределу
- Центральная предельная теорема: в пределе — случайное распределение

Закон больших чисел

Закон больших чисел

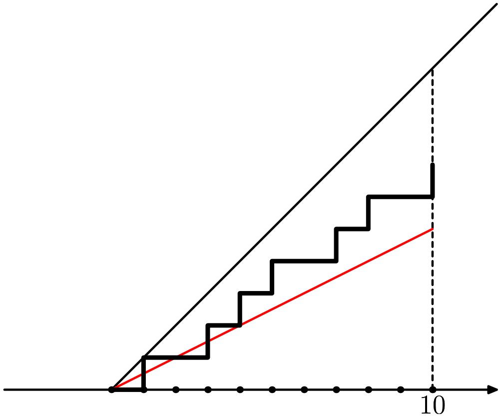
Подбросим монету 10 раз:

Закон больших чисел

Подбросим монету 10 раз: 1011101101

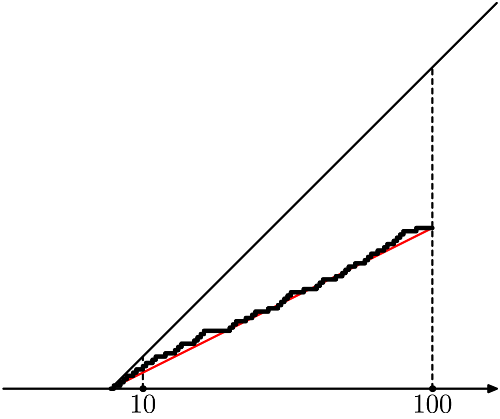
Закон больших чисел

Подбросим монету 10 раз: 1011101101



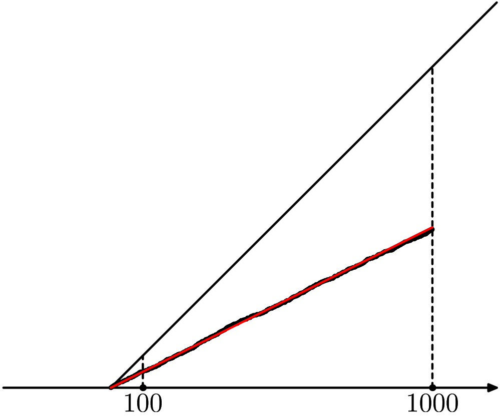
Закон больших чисел

Подбросим монету 100 раз: 10111011011011001001 1...



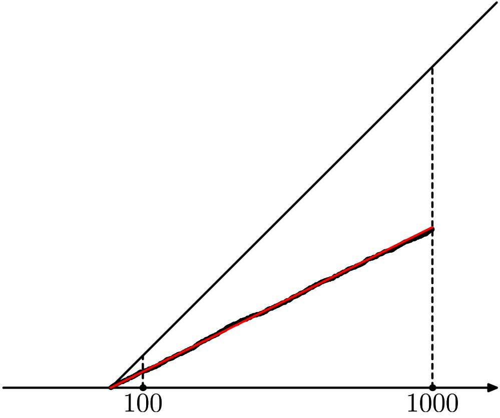
Закон больших чисел

Подбросим монету 1000 раз: 1011101101101100100011...



Закон больших чисел

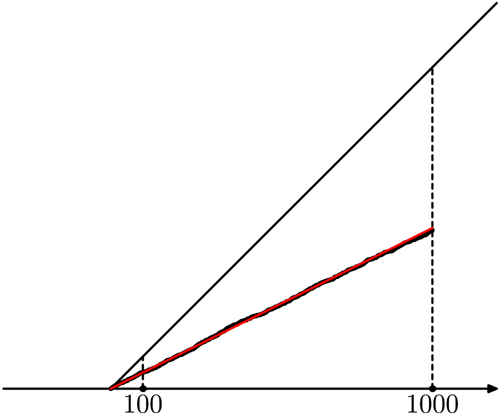
Подбросим монету 1000 раз: 10111011011011001001 1...



$$\frac{S_N}{N} \to \frac{1}{2}$$

Закон больших чисел

Подбросим монету 1000 раз: 10111011011011001001 1...



$$\frac{S_N}{N} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{[Nx]}}{N} \to \frac{x}{2}$$

Отклонение от среднего

Как устроено отклонение числа орлов S_N от среднего значения $\frac{N}{2}$?

Отклонение от среднего

Как устроено отклонение числа орлов S_N от среднего значения $\frac{N}{2}$?

$$\frac{S_N}{N} - \frac{1}{2} = \frac{S_N - \frac{N}{2}}{N} \to 0.$$

Отклонение от среднего

Как устроено отклонение числа орлов S_N от среднего значения $\frac{N}{2}$?

$$\frac{S_N}{N} - \frac{1}{2} = \frac{S_N - \frac{N}{2}}{N} \to 0.$$

А что, если делить на меньшую степень N?

Среднеквадратичное отклонение

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 =$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 = \sum_i \mathbb{E}\, X_i^2 +$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 = \sum_i \mathbb{E}\, X_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i X_j) =$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 = \sum_i \mathbb{E}\, X_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i X_j) = N +$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 = \sum_i \mathbb{E}\, X_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i X_j) = N + 0 =$$

Среднеквадратичное отклонение

Посмотрим на среднее значение квадрата величины

$$2S_N - N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

где $X_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2 \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$

$$\mathbb{E}(2S_N - N)^2 = \sum_i \mathbb{E}\, X_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i X_j) = N + 0 = N.$$

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

На 10 000 подбрасываний: вероятность попасть в отрезок

-

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

На 10 000 подбрасываний: вероятность попасть в отрезок

- $5\,000 \pm 5$ 8%
-

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

На 10 000 подбрасываний: вероятность попасть в отрезок

- $5\ 000 \pm 5$ 8%
- $5\ 000 \pm 50$ 68%
-

Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

С ростом N распределение случайной величины $\frac{2S_N - N}{\sqrt{N}}$ стремится к распределению Гаусса, имеющему плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

На 10 000 подбрасываний: вероятность попасть в отрезок

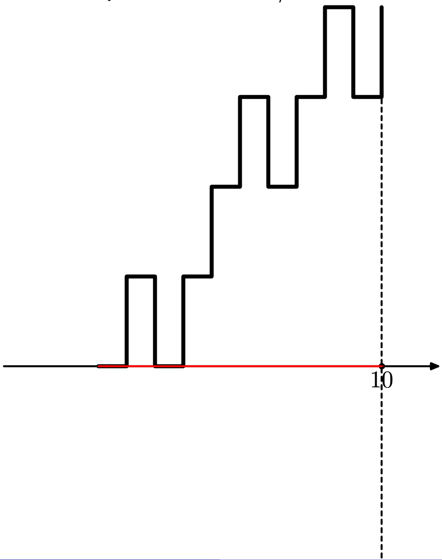
- $5\,000 \pm 5$ 8%
- $5\,000 \pm 50$ 68%
- $5\,000 \pm 150$ 99.7%

Броуновское движение

Посмотрим на отклонения от среднего $S_{[Nx]} - \frac{Nx}{2}$, нормированные на их среднеквадратичное $\sqrt{N}/2$:

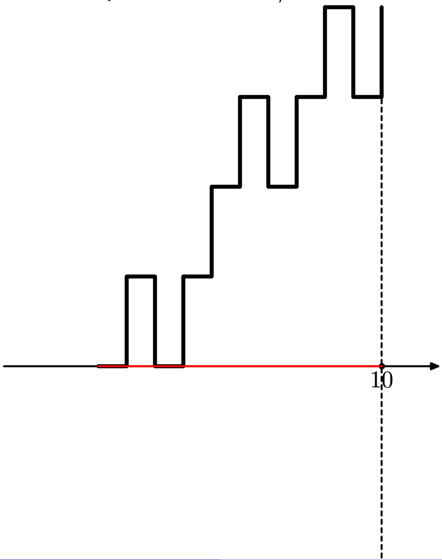
Броуновское движение

Посмотрим на отклонения от среднего $S_{[Nx]} - \frac{Nx}{2}$, нормированные на их среднеквадратичное $\sqrt{N}/2$:



Броуновское движение

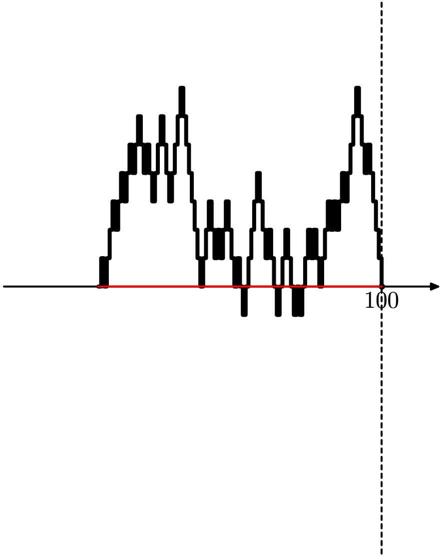
Посмотрим на отклонения от среднего $S_{[Nx]} - \frac{Nx}{2}$, нормированные на их среднеквадратичное $\sqrt{N}/2$:



$$\frac{S_{[Nx]} - \frac{x}{2}}{\sqrt{N}/2}$$

Броуновское движение

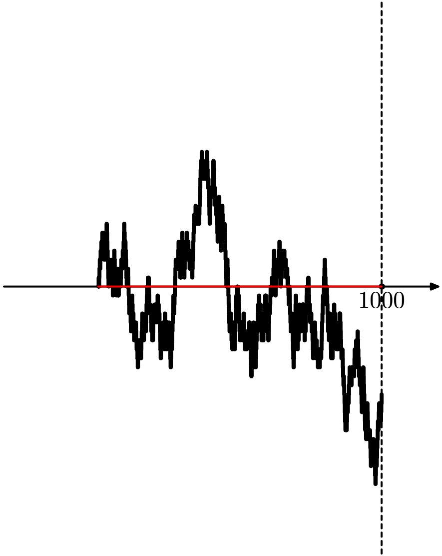
Посмотрим на отклонения от среднего $S_{[Nx]} - \frac{Nx}{2}$, нормированные на их среднеквадратичное $\sqrt{N}/2$:



$$\frac{S_{[Nx]} - \frac{x}{2}}{\sqrt{N}/2}$$

Броуновское движение

Посмотрим на отклонения от среднего $S_{[Nx]} - \frac{Nx}{2}$, нормированные на их среднеквадратичное $\sqrt{N}/2$:



$$\frac{S_{[Nx]} - \frac{x}{2}}{\sqrt{N}/2}$$

Постановка вопроса

Возьмём N единичных квадратиков.

Постановка вопроса

Возьмём N (очень много) единичных квадратиков.

Постановка вопроса

Возьмём N (очень много) единичных квадратиков. Склеим их так, чтобы получилась сфера.

Постановка вопроса

Возьмём N (очень много) единичных квадратиков. Склеим их так, чтобы получилась сфера. Что можно сказать о получившейся сфере? Например, какой у неё будет диаметр

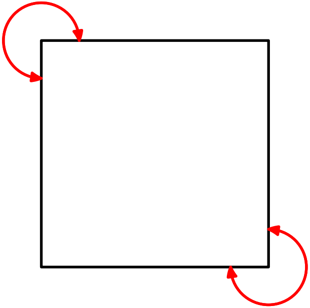
Постановка вопроса

Возьмём N (очень много) единичных квадратиков. Склеим их так, чтобы получилась сфера. Что можно сказать о получившейся сфере? Например, какой у неё будет диаметр (длина пути по сфере есть сумма длин пройденных путей внутри квадратиков)?

Постановка вопроса

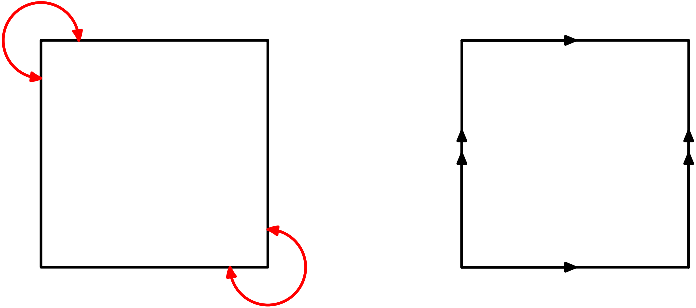
Возьмём N (очень много) единичных квадратиков. Склеим их так, чтобы получилась сфера. Что можно сказать о получившейся сфере? Например, какой у неё (скорее всего) будет диаметр (длина пути по сфере есть сумма длин пройденных путей внутри квадратиков)?

Примеры–1



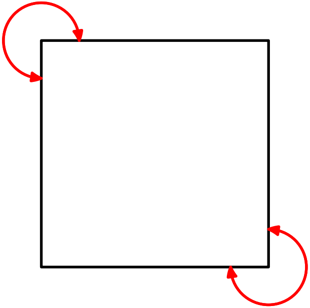
Первая склейка даёт сферу

Примеры–1



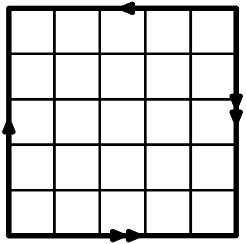
Первая склейка даёт сферу, а вторая — тор

Примеры–1



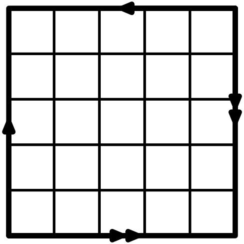
Первая склейка даёт сферу, а вторая — тор (и потому нас не интересует).

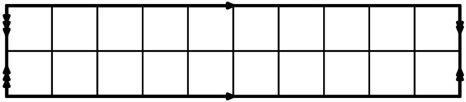
Примеры–2



Можно сделать сферу из квадрата $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$;

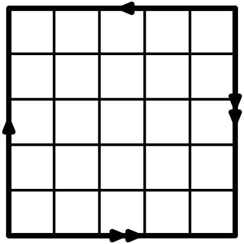
Примеры–2

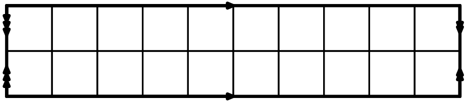




Можно сделать сферу из квадрата $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$; а можно — из «трубочки» длины $N/2$.

Примеры–2





Можно сделать сферу из квадрата $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$; а можно — из «трубочки» длины $N/2$. Наконец, можно сшить из двух четырёхвалентных «деревьев» глубины $\sim \log N$.

Уточнение формулировки вопроса

Определение

Плоской картой называется вложенный в сферу граф,

Уточнение формулировки вопроса

Определение

Плоской картой называется вложенный в сферу граф, рассматриваемый с точностью до непрерывной деформации.

Уточнение формулировки вопроса

Определение

Плоской картой называется вложенный в сферу граф, рассматриваемый с точностью до непрерывной деформации.

Рис.: Плоская карта. (Picture credit: N. Curien)

Основной принцип

Исчислить — значит понять!

Основной принцип

Исчислить — значит понять!

Давайте посчитаем, а сколько вообще есть плоских карт с четырёхугольными гранями?

Плоская 4-карта: простейшие свойства

- Если у карты N четырёхугольных граней,

Плоская 4-карта: простейшие свойства

- Если у карты N четырёхугольных граней,
- то $4N/2 = 2N$ рёбер

Плоская 4-карта: простейшие свойства

- Если у карты N четырёхугольных граней,
- то $4N/2 = 2N$ рёбер
- и, значит, $2 + 2N - N = N + 2$ вершин (В$-$Р$+$Г$=$2).

Вершины

- Давайте отметим на 4-карте одну вершину.

Вершины

- Давайте отметим на 4-карте одну вершину.
- Осталось $N+1$, и N граней.

Вершины

- Давайте отметим на 4-карте одну вершину.
- Осталось $N+1$, и N граней.
- А нельзя ли провести в каждой грани по ребру так, чтобы новые рёбра образовывали дерево?

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

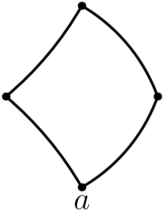
Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной.

Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

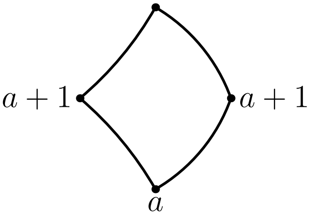
Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a.



Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

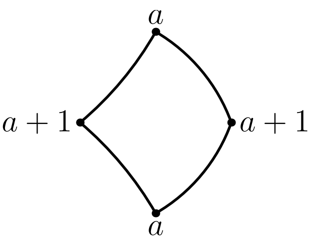
Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a+1$:

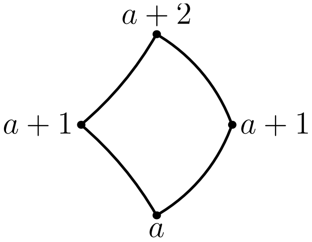


Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a+1$:

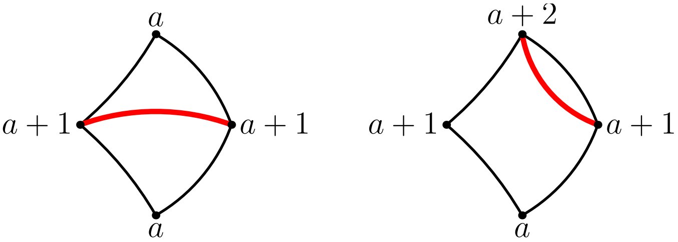




Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a+1$:

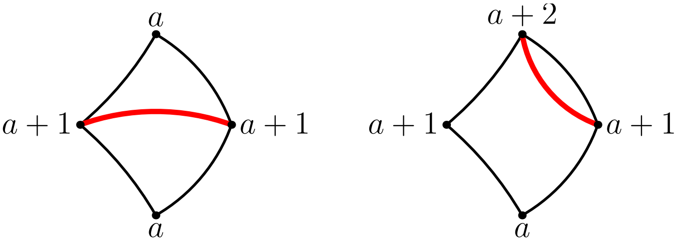


Проведём в них рёбра, как показано выше.

Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a + 1$:



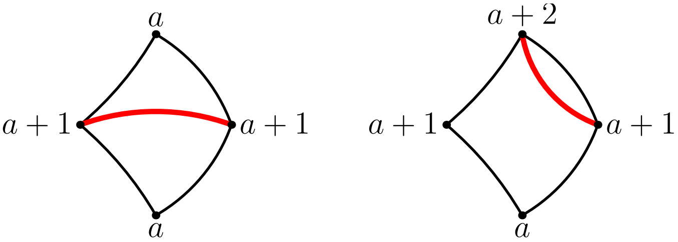
Проведём в них рёбра, как показано выше.

Теорема (Cori-Vauquelin (1981), Schaeffer (1998))

Красные рёбра образуют дерево.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a+1$:



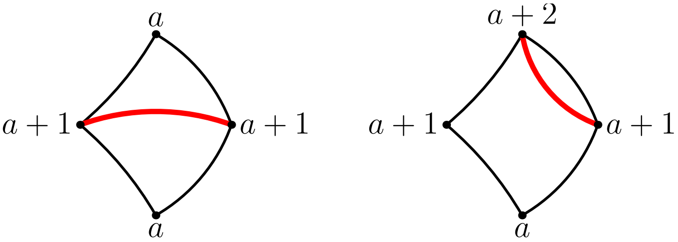
Проведём в них рёбра, как показано выше.

Теорема (Cori-Vauquelin (1981), Schaeffer (1998))

Красные рёбра образуют дерево. Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера.

Подпишем все не-отмеченные вершины расстоянием в графе до отмеченной. На каждой грани посмотрим на наименьшую из подписей: пусть это a. Ёе соседи — $a + 1$:

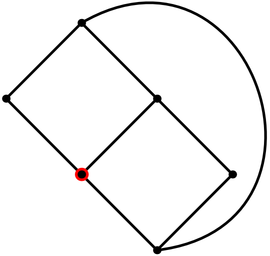


Проведём в них рёбра, как показано выше.

Теорема (Cori-Vauquelin (1981), Schaeffer (1998))

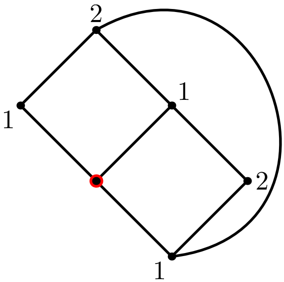
Красные рёбра образуют дерево. Его вершины подписаны натуральными числами, отличающимися на ≤ 1 на каждом ребре. Наименьшее из встречающихся чисел равно 1.

Пример



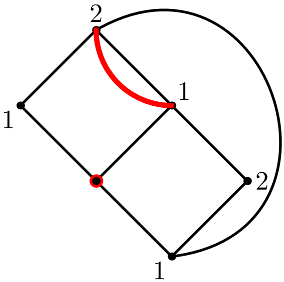
Возьмём плоскую 4-карту,

Пример



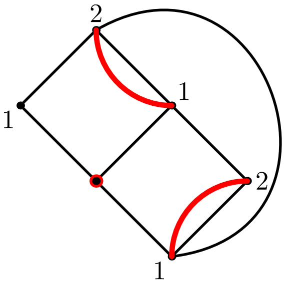
Возьмём плоскую 4-карту, подпишем расстояния до отмеченной вершины.

Пример



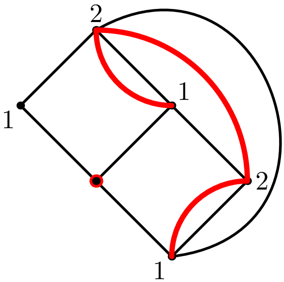
Возьмём плоскую 4-карту, подпишем расстояния до отмеченной вершины. Применим алогоритм

Пример



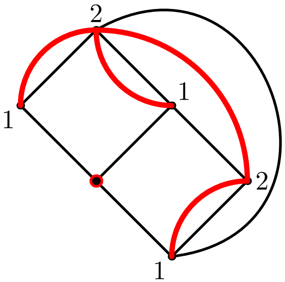
Возьмём плоскую 4-карту, подпишем расстояния до отмеченной вершины. Применим алогоритм

Пример



Возьмём плоскую 4-карту, подпишем расстояния до отмеченной вершины. Применим алогоритм. А какое ребро достанет до самой левой вершины?

Пример



Возьмём плоскую 4-карту, подпишем расстояния до отмеченной вершины. Применим алогоритм. А какое ребро достанет до самой левой вершины?

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,
- его вершины подписаны натуральными числами

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,
- его вершины подписаны натуральными числами: задано отображение $d : V \to \mathbb{N}$

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,
- его вершины подписаны натуральными числами: задано отображение $d : V \to \mathbb{N}$, причём $\min_v d(v) = 1$.

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,
- его вершины подписаны натуральными числами: задано отображение $d : V \to \mathbb{N}$, причём $\min_v d(v) = 1$.
- для любых соседних вершин $u \sim v$ выполнено $|d(u) - d(v)| \leq 1$.

Обратный ход: декларация

Пусть

- на плоскости задано дерево со множеством вершин V,
- его вершины подписаны натуральными числами: задано отображение $d : V \to \mathbb{N}$, причём $\min_v d(v) = 1$.
- для любых соседних вершин $u \sim v$ выполнено $|d(u) - d(v)| \leq 1$.

Биекция Кори–Ваклина–Шеффера позволяет построить по этим данным плоскую карту с четырёхугольными гранями.

Обратный ход: процедура

- Добавим снаружи дополнительную «отмеченную» вершину X.

Обратный ход: процедура

- Добавим снаружи дополнительную «отмеченную» вершину X.
- Будем обходить дерево «снаружи» в положительном направлении.

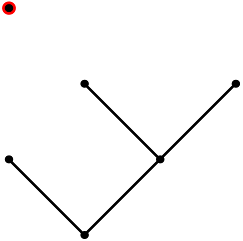
Обратный ход: процедура

- Добавим снаружи дополнительную «отмеченную» вершину X.
- Будем обходить дерево «снаружи» в положительном направлении.
- От каждой встреченной вершины v, подписанной числом $d(v) > 1$ проведём ребро к ближайшей по ходу обхода вершине u с пометкой $d(u) = d(v) - 1$.

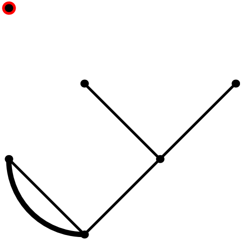
Обратный ход: процедура

- Добавим снаружи дополнительную «отмеченную» вершину X.
- Будем обходить дерево «снаружи» в положительном направлении.
- От каждой встреченной вершины v, подписанной числом $d(v) > 1$ проведём ребро к ближайшей по ходу обхода вершине u с пометкой $d(u) = d(v) - 1$.
- От каждой встреченной вершины v с $d(v) = 1$ проведём ребро к вершине X.

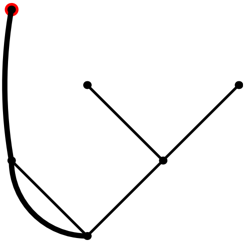
Обратный ход: иллюстрация



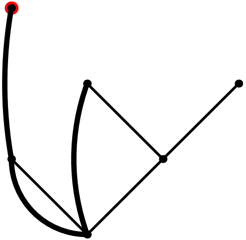
Обратный ход: иллюстрация



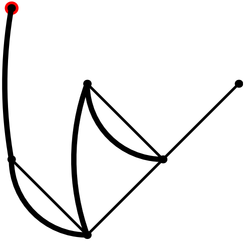
Обратный ход: иллюстрация



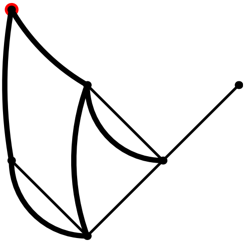
Обратный ход: иллюстрация



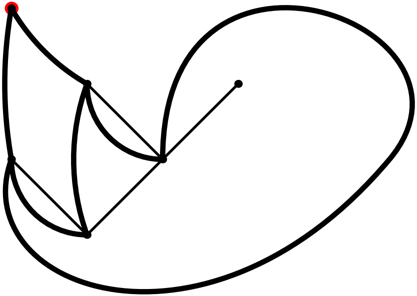
Обратный ход: иллюстрация



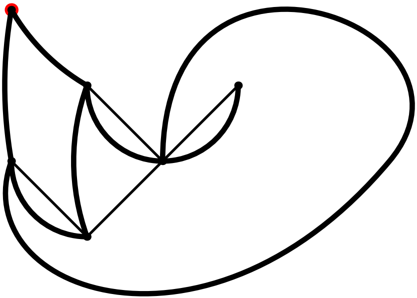
Обратный ход: иллюстрация



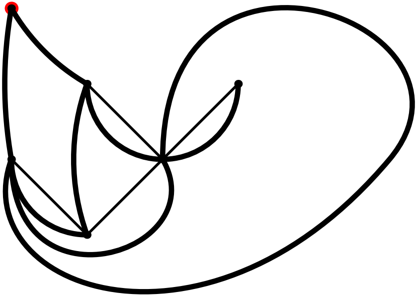
Обратный ход: иллюстрация



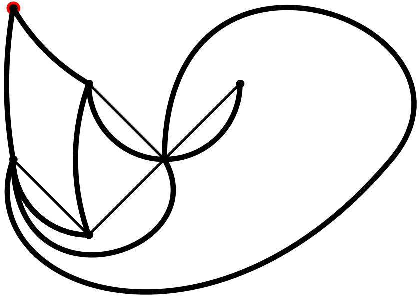
Обратный ход: иллюстрация



Обратный ход: иллюстрация



Обратный ход: иллюстрация



Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве.

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Тогда:

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Тогда:

- Общее число так оснащённых карт = число деревьев * число способов оснастить дерево

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Тогда:

- Общее число так оснащённых карт = число деревьев * число способов оснастить дерево
- Число способов оснастить дерево с $|d(u) - d(v)| \leq 1$ и $\min_v d(v) = 1$

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Тогда:

- Общее число так оснащённых карт = число деревьев * число способов оснастить дерево
- Число способов оснастить дерево с $|d(u) - d(v)| \leq 1$ и $\min_v d(v) = 1$
  - равно числу способов оснастить корневое дерево с $|d'(u) - d'(v)| \leq 1$ и $d'(\text{корня}) = 0$,

Подсчёт четырёхугольных карт

Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.
Тогда:

- Общее число так оснащённых карт = число деревьев * число способов оснастить дерево
- Число способов оснастить дерево с $|d(u) - d(v)| \leq 1$ и $\min_v d(v) = 1$
  - равно числу способов оснастить корневое дерево с $|d'(u) - d'(v)| \leq 1$ и $d'(\text{корня}) = 0$,
  - и потому равно 3^N.

Подсчёт четырёхугольных карт

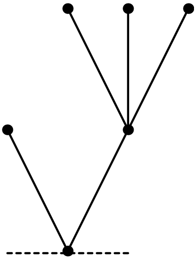
Чтобы было удобнее жить, поменяем правила игры: выберём дополнительно ориентированное ребро в дереве. Тогда дерево становится корневым, и выбрано «первое» ребро среди выходящих из корня.

Тогда:

- Общее число так оснащённых карт = число деревьев * число способов оснастить дерево
- Число способов оснастить дерево с $|d(u) - d(v)| \leq 1$ и $\min_v d(v) = 1$
  - равно числу способов оснастить корневое дерево с $|d'(u) - d'(v)| \leq 1$ и $d'(\text{корня}) = 0$,
  - и потому равно 3^N.
- Число деревьев = N-е число Каталана = $\frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$

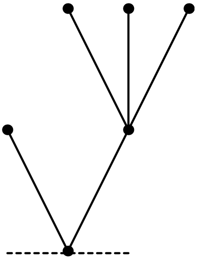
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =



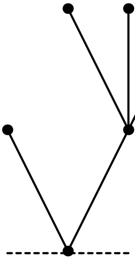
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =



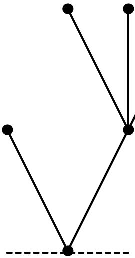
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



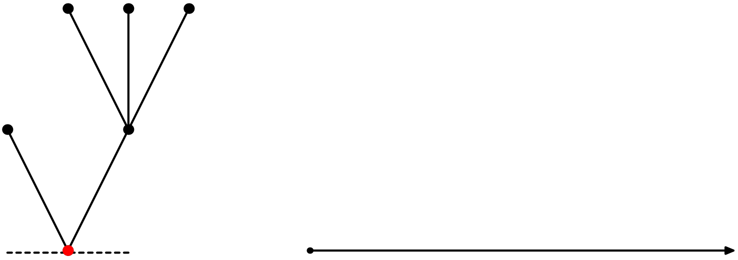
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



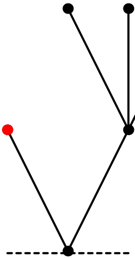
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



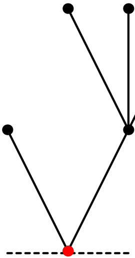
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



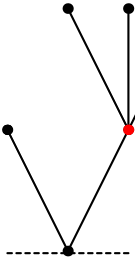
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



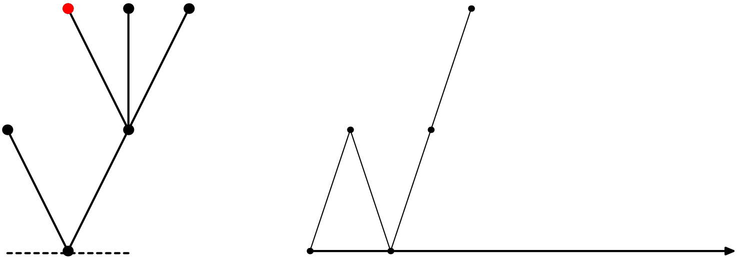
Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



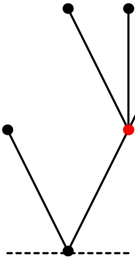
Число деревьев

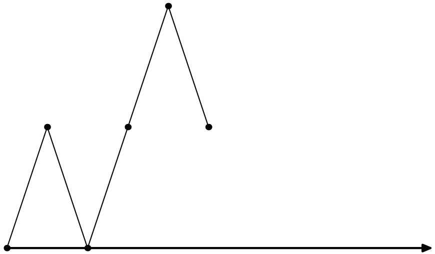
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



Число деревьев

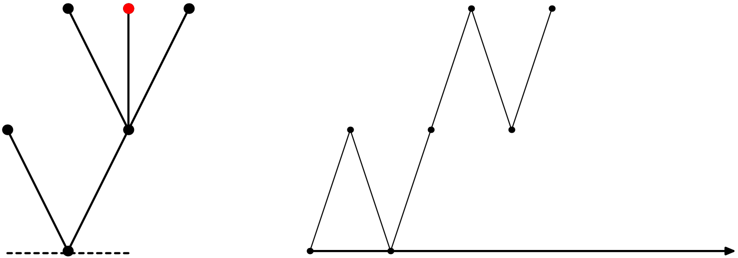
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).





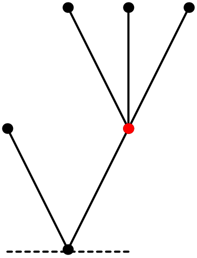
Число деревьев

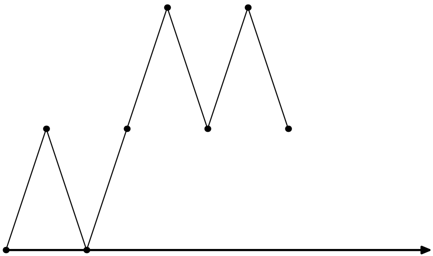
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).



Число деревьев

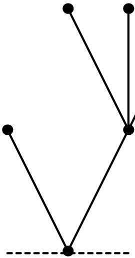
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).

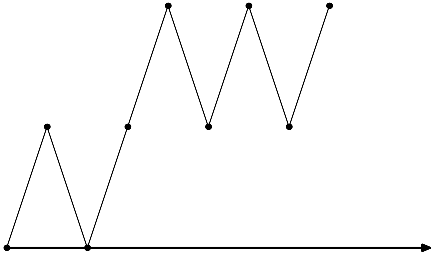




Число деревьев

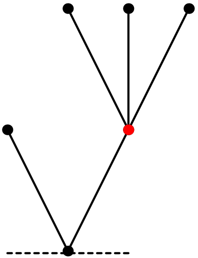
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).

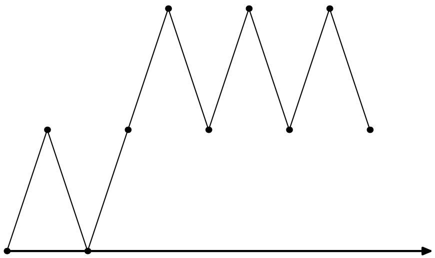




Число деревьев

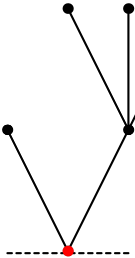
Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).

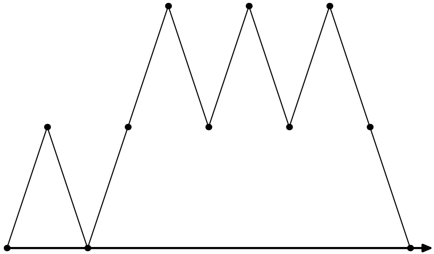




Число деревьев

Дерево на плоскости с выделенным «первым» ребром =
функция высоты при обходе «снаружи» =
путь Дика длины $2N$ (путь «$+1/-1$», не спускающихся ниже нуля посередине, и заканчивающийся в нуле).





Отступление: как найти число Каталана?

	1						
0		1					
	1		1				
0		2		1			
	2		3		1		
0		5		4		1	
	5		9		1		1

Отступление: как найти число Каталана?

						-1		1						
					-1		0		1					
				-1		-1		1		1				
			-1		-2		0		2		1			
		-1		-3		-2		2		3		1		
	-1		-4		-5		0		5		4		1	
-1		-5		-9		-5		5		9		5		1

Отступление: как найти число Каталана?

-1 1

-1 0 1

-1 -1 1 1

-1 -2 0 2 1

-1 -3 -2 2 3 1

-1 -4 -5 0 5 4 1

-1 -5 -9 -5 5 9 5 1

$$K_N = \binom{2N}{N} - \binom{2N}{N+1} =$$

Отступление: как найти число Каталана?

						-1		1						
					-1		0		1					
				-1		-1		1		1				
			-1		-2		0		2		1			
		-1		-3		-2		2		3		1		
	-1		-4		-5		0		5		4		1	
-1		-5		-9		-5		5		9		5		1

$$K_N = \binom{2N}{N} - \binom{2N}{N+1} = \binom{2N}{N} -$$

Отступление: как найти число Каталана?

						-1		1						
					-1		0		1					
				-1		-1		1		1				
			-1		-2		0		2		1			
		-1		-3		-2		2		3		1		
	-1		-4		-5		0		5		4		1	
-1		-5		-9		-5		5		9		5		1

$$K_N = \binom{2N}{N} - \binom{2N}{N+1} = \binom{2N}{N} - \frac{N}{N+1}\binom{2N}{N} =$$

Отступление: как найти число Каталана?

						-1		1						
					-1		0		1					
				-1		-1		1		1				
			-1		-2		0		2		1			
		-1		-3		-2		2		3		1		
	-1		-4		-5		0		5		4		1	
-1		-5		-9		-5		5		9		5		1

$$K_N = \binom{2N}{N} - \binom{2N}{N+1} = \binom{2N}{N} - \frac{N}{N+1}\binom{2N}{N} =$$

$$= \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$$

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза, и от $D' := \max_v |d'(v)|$ не более, чем в четыре.

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза, и от $D' := \max_v |d'(v)|$ не более, чем в четыре.
- Случайно выбранное плоское дерево из N рёбер имеет высоту $\sim \sqrt{N}$.

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза, и от $D' := \max_v |d'(v)|$ не более, чем в четыре.
- Случайно выбранное плоское дерево из N рёбер имеет высоту $\sim \sqrt{N}$.
- На высоте $\sqrt{N}$ случайное блуждание «$+1/0/-1$» в типичном случае уходит от нуля на $\sim \sqrt{\sqrt{N}}$

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза, и от $D' := \max_v |d'(v)|$ не более, чем в четыре.
- Случайно выбранное плоское дерево из N рёбер имеет высоту $\sim \sqrt{N}$.
- На высоте $\sqrt{N}$ случайное блуждание «$+1/0/-1$» в типичном случае уходит от нуля на $\sim \sqrt{\sqrt{N}} = N^{1/4}$.

Асимптотика диаметра

- Диаметр карты отличается от $D := \max_v d(v)$ не более, чем в два раза, и от $D' := \max_v |d'(v)|$ не более, чем в четыре.
- Случайно выбранное плоское дерево из N рёбер имеет высоту $\sim \sqrt{N}$.
- На высоте $\sqrt{N}$ случайное блуждание «$+1/0/-1$» в типичном случае уходит от нуля на $\sim \sqrt{\sqrt{N}} = N^{1/4}$.
- Это — теорема Chassaing–Schaeffer (2002).

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере;

Относительно предельной случайной метрики ρ_* *хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна 4.*

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.

Относительно предельной случайной метрики ρ_* хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна 4.

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.
Изменим масштаб: разделим её на $N^{1/4}$.

Относительно предельной случайной метрики ρ_* хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна 4.

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.
Измени масштаб: разделим её на $N^{1/4}$. Получаем случайную метрику на сфере, для которой диаметр (скорее всего) порядка 1.

Относительно предельной случайной метрики ρ_* хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна 4.

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.
Изменим масштаб: разделим её на $N^{1/4}$. Получаем случайную метрику на сфере, для которой диаметр (скорее всего) порядка 1.

Theorem (Le Gall, Miermont; 2011)

Случайные метрики $\rho_N = N^{-1/4} d_N$ на сфере сходятся по распределению.

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.
Изменим масштаб: разделим её на $N^{1/4}$. Получаем случайную метрику на сфере, для которой диаметр (скорее всего) порядка 1.

Theorem (Le Gall, Miermont; 2011)

Случайные метрики $\rho_N = N^{-1/4} d_N$ на сфере сходятся по распределению. Относительно предельной случайной метрики ρ_* хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна

Предельное распределение на метриках

Для каждого N можно рассмотреть случайную метрику на сфере; её диаметр (скорее всего) порядка $N^{1/4}$.
Изменим масштаб: разделим её на $N^{1/4}$. Получаем случайную метрику на сфере, для которой диаметр (скорее всего) порядка 1.

Theorem (Le Gall, Miermont; 2011)

Случайные метрики $\rho_N = N^{-1/4} d_N$ на сфере сходятся по распределению. Относительно предельной случайной метрики ρ_* хаусдорфова размерность сферы с вероятностью 1 равна 4.

Физическое описание предельной метрики

Физическое описание предельной метрики

Гипотеза (Duplantier–Sheffield)

ρ_* может быть задана как (регуляризация) $\exp(\gamma \cdot h) \cdot ds$, где γ — некоторая константа, h — гауссово свободное поле, а ds — обычная метрика на сфере.

Физическое описание предельной метрики

Гипотеза (Duplantier–Sheffield)

ρ_* может быть задана как (регуляризация) $\exp(\gamma \cdot h) \cdot ds$, *где* γ *— некоторая константа,* h *— гауссово свободное поле, а* ds *— обычная метрика на сфере.*

Проблема: никто не умеет доказывать даже, что процедура регуляризации из гипотезы работает.

Физическое описание предельной метрики

Гипотеза (Duplantier–Sheffield)

ρ_* может быть задана как (регуляризация) $\exp(\gamma \cdot h) \cdot ds$, где γ — некоторая константа, h — гауссово свободное поле, а ds — обычная метрика на сфере.

Проблема: никто не умеет доказывать даже, что процедура регуляризации из гипотезы работает.
А что значат все эти слова?

Гауссово свободное поле

Формальное определение:

Гауссово свободное поле

Формальное определение:

Определение

Гауссовым свободным полем в области D называется случайная гауссовская обобщённая функция $h(z)$ с нулевым средним и ковариацией $\mathrm{cov}(h(x), h(y)) = -G(x, y)$, где G — функция Грина в области D.

Гауссово свободное поле

Формальное определение:

Определение

Гауссовым свободным полем в области D называется случайная гауссовская обобщённая функция $h(z)$ с нулевым средним и ковариацией $\mathrm{cov}(h(x), h(y)) = -G(x, y)$, где G — функция Грина в области D.

Правда, стало не сильно лучше?

Отступление: обобщённые функции

Как на одном языке работать с точечными массами и с распределением массы с плотностью?

Отступление: обобщённые функции

Как на одном языке работать с точечными массами и с распределением массы с плотностью? Как в уравнениях с частными производными описывать разрывные решения (скажем, ударные волны)?

Отступление: обобщённые функции

Как на одном языке работать с точечными массами и с распределением массы с плотностью? Как в уравнениях с частными производными описывать разрывные решения (скажем, ударные волны)?
Обычной функции $f(x)$ можно сопоставить «скалярное произведение с ней»: отображение

$$F_f : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Отступление: обобщённые функции

Как на одном языке работать с точечными массами и с распределением массы с плотностью? Как в уравнениях с частными производными описывать разрывные решения (скажем, ударные волны)?
Обычной функции $f(x)$ можно сопоставить «скалярное произведение с ней»: отображение

$$F_f : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Определение

Обобщённой функцией называется (непрерывное) линейное отображение $F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Отступление—2: Зачем обобщённые функции нужны?

Интегрирование по частям:

$$F_{f'}(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx =$$

Отступление—2: Зачем обобщённые функции нужны?

Интегрирование по частям:

$$F_{f'}(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx$$

Отступление—2: Зачем обобщённые функции нужны?

Интегрирование по частям:

$$F_{f'}(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -F_f(\varphi').$$

Отступление—2: Зачем обобщённые функции нужны?

Интегрирование по частям:

$$F_{f'}(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -F_f(\varphi').$$

Определение

Производной обобщённой функции F называется обобщённая функция $F'(\varphi) := -F(\varphi')$.

Отступление—2: Зачем обобщённые функции нужны?

Интегрирование по частям:

$$F_{f'}(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -F_f(\varphi').$$

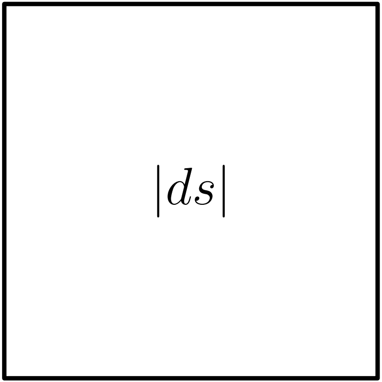
Определение

Производной обобщённой функции F называется обобщённая функция $F'(\varphi) := -F(\varphi')$.

Обобщённые функции можно дифференцировать, не думая ни о чём!

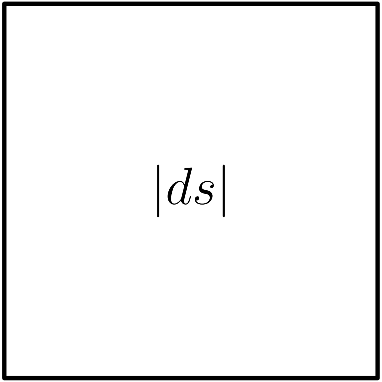
Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.



Игрушечная модель: мультипликативные каскады

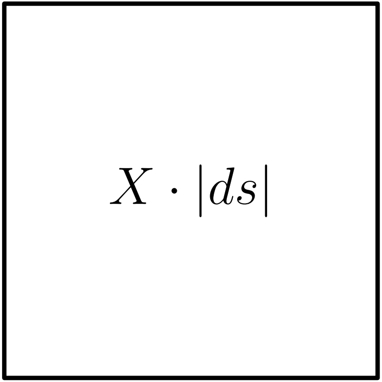
Возьмём единичный квадрат.



На нём есть стандартная риманова метрика *ds*: путник (или луч света) путешествует с единичной скоростью и замеряет время прохождения кратчайшего пути.

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

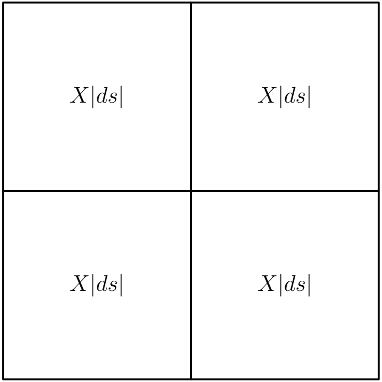


.

Умножим метрику на случайный множитель X (скорость везде упала в X раз).

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

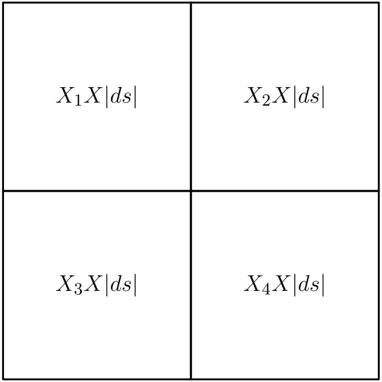


.

Теперь разделим квадрат на четыре четверти

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.



.

Теперь разделим квадрат на четыре четверти и умножим метрику дополнительно на $X_1, \ldots, X_4$ в соответствующих четвертях.

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

X_1X	X_1X	X_2X	X_2X
X_1X	X_1X	X_2X	X_2X
X_2X	X_2X	X_2X	X_2X
X_2X	X_2X	X_2X	X_2X

.

А теперь разделим каждую из этих четвертей ещё на четыре четверти

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

$X_{11}X_1X$	$X_{12}X_1X$	$X_{21}X_2X$	$X_{22}X_2X$
$X_{13}X_1X$	$X_{14}X_1X$	$X_{23}X_2X$	$X_{24}X_2X$
$X_{31}X_2X$	$X_{32}X_2X$	$X_{41}X_2X$	$X_{42}X_2X$
$X_{33}X_2X$	$X_{34}X_2X$	$X_{43}X_2X$	$X_{44}X_2X$

.

А теперь разделим каждую из этих четвертей ещё на четыре четверти и доумножим метрику в них ещё на $X_{11}, \ldots, X_{44}$.

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

$X_{11}X_1X$	$X_{12}X_1X$	$X_{21}X_2X$	$X_{22}X_2X$
$X_{13}X_1X$	$X_{14}X_1X$	$X_{23}X_2X$	$X_{24}X_2X$
$X_{31}X_2X$	$X_{32}X_2X$	$X_{41}X_2X$	$X_{42}X_2X$
$X_{33}X_2X$	$X_{34}X_2X$	$X_{43}X_2X$	$X_{44}X_2X$

.

Все множители $X_\bullet$ — независимы и одинаково распределены.

Игрушечная модель: мультипликативные каскады

Возьмём единичный квадрат.

$X_{11}X_1X$	$X_{12}X_1X$	$X_{21}X_2X$	$X_{22}X_2X$
$X_{13}X_1X$	$X_{14}X_1X$	$X_{23}X_2X$	$X_{24}X_2X$
$X_{31}X_2X$	$X_{32}X_2X$	$X_{41}X_2X$	$X_{42}X_2X$
$X_{33}X_2X$	$X_{34}X_2X$	$X_{43}X_2X$	$X_{44}X_2X$

.

Все множители $X_\bullet$ — независимы и одинаково распределены. Получаем последовательность (случайных) метрик d_n. Может ли она сходиться?

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X.

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$,

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 1.01^n и «взорвётся».

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 1.01^n и «взорвётся».
- А если рассмотреть множители, распределённые как $0.99 \cdot X$,

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 1.01^n и «взорвётся».
- А если рассмотреть множители, распределённые как $0.99 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 0.99^n и «схлопнется».

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 1.01^n и «взорвётся».
- А если рассмотреть множители, распределённые как $0.99 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 0.99^n и «схлопнется».
- Правильная постановка: давайте добавим нормирующий множитель. Попробуем, для заданного распределения X,

Аккуратная постановка вопроса

- Произведение множителей расходится в каждой точке. Поэтому предел может быть только у последовательности метрик как расстояний от точки до точки.
- Предела нет для типичного распределения множителя X. Ведь если есть нетривиальный предел для какого-то распределения, то при взятии множителей, распределённых как $1.01 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 1.01^n и «взорвётся».
- А если рассмотреть множители, распределённые как $0.99 \cdot X$, последовательность метрик d_n умножится на 0.99^n и «схлопнется».
- Правильная постановка: давайте добавим нормирующий множитель. Попробуем, для заданного распределения X, найти такое $\lambda > 0$, что сходится последовательность метрик $\lambda^n d_n$.

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.
- Произведение $XX_{i_1}X_{i_1 i_2}\dots$ равно $\exp(Y + Y_{i_1} + Y_{i_1 i_2})$.

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.
- Произведение $X X_{i_1} X_{i_1 i_2} \dots$ равно $\exp(Y + Y_{i_1} + Y_{i_1 i_2})$.
- Сумма кусочно-постоянных (случайных!) функций, стоящих под экспонентой, расходится в каждой точке.

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.
- Произведение $XX_{i_1}X_{i_1 i_2}\ldots$ равно $\exp(Y + Y_{i_1} + Y_{i_1 i_2})$.
- Сумма кусочно-постоянных (случайных!) функций, стоящих под экспонентой, расходится в каждой точке.
- Но она (при «хорошем» распределении Y) сходится в классе обобщённых функций!

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.
- Произведение $XX_{i_1}X_{i_1 i_2}\dots$ равно $\exp(Y + Y_{i_1} + Y_{i_1 i_2})$.
- Сумма кусочно-постоянных (случайных!) функций, стоящих под экспонентой, расходится в каждой точке.
- Но она (при «хорошем» распределении Y) сходится в классе обобщённых функций!
- Если $Y_\bullet \sim \mathcal{N}(0,1)$, то сумма — *диадическое* гауссово свободное поле,

Причём тут обобщённые функции?

- Пусть $X_\bullet = \exp(Y_\bullet)$.
- Произведение $XX_{i_1}X_{i_1 i_2}\dots$ равно $\exp(Y + Y_{i_1} + Y_{i_1 i_2})$.
- Сумма кусочно-постоянных (случайных!) функций, стоящих под экспонентой, расходится в каждой точке.
- Но она (при «хорошем» распределении Y) сходится в классе обобщённых функций!
- Если $Y_\bullet \sim \mathcal{N}(0,1)$, то сумма — *диадическое* гауссово свободное поле, достаточно похожее на «настоящее».

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится.

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

- Из закона 0–1 Колмогорова следует,

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

- Из закона 0–1 Колмогорова следует, что эта размерность с вероятностью 1 — константа (т. е. не случайна)!

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

- Из закона 0–1 Колмогорова следует, что эта размерность с вероятностью 1 — константа (т. е. не случайна)!
- Формула Книжника–Полякова–Замолодчикова (1988) связывает scaling exponents Δ_0 и Δ в евклидовой и в случайной геометрии:

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

- Из закона 0–1 Колмогорова следует, что эта размерность с вероятностью 1 — константа (т. е. не случайна)!
- Формула Книжника–Полякова–Замолодчикова (1988) связывает scaling exponents Δ_0 и Δ в евклидовой и в случайной геометрии:

$$\Delta_0 = \frac{\gamma^2}{4}\Delta^2 + (1 - \frac{\gamma^2}{4})\Delta$$

Формула KPZ

Пусть последовательность метрик $\lambda^n d_n$ сходится. Для любого множества K посмотрим на его (хаусдорфову) размерность относительно (случайной) предельной метрики d_*.

- Из закона 0–1 Колмогорова следует, что эта размерность с вероятностью 1 — константа (т. е. не случайна)!
- Формула Книжника–Полякова–Замолодчикова (1988) связывает scaling exponents Δ_0 и Δ в евклидовой и в случайной геометрии:

$$\Delta_0 = \frac{\gamma^2}{4}\Delta^2 + (1 - \frac{\gamma^2}{4})\Delta$$

$$= \Delta + c_\gamma \Delta(1 - \Delta).$$

Результаты

- **Kahane–Peyrière (1976)**: сходимость мультипликативных каскадов для меры

Результаты

- **Kahane–Peyrière (1976)**: сходимость мультипликативных каскадов для меры ($\Rightarrow$ метрики на отрезке)

Результаты

- **Kahane–Peyrière (1976)**: сходимость мультипликативных каскадов для меры ($\Rightarrow$ метрики на отрезке)
- **Benjamini–Schramm (2008)**: формула Книжника–Полякова–Замолодчикова для мультипликативных каскадов на отрезке

Результаты

- **Kahane–Peyrière (1976)**: сходимость мультипликативных каскадов для меры ($\Rightarrow$ метрики на отрезке)
- **Benjamini–Schramm (2008)**: формула Книжника–Полякова–Замолодчикова для мультипликативных каскадов на отрезке
- **Duplantier–Sheffield (препринт ’08; статья 2011)**: формула Книжника–Полякова–Замолодчикова относительно случайной меры

Результаты

- **Kahane–Peyrière (1976)**: сходимость мультипликативных каскадов для меры ($\Rightarrow$ метрики на отрезке)
- **Benjamini–Schramm (2008)**: формула Книжника–Полякова–Замолодчикова для мультипликативных каскадов на отрезке
- **Duplantier–Sheffield (препринт ’08; статья 2011)**: формула Книжника–Полякова–Замолодчикова относительно случайной меры
- **Khristoforov–K–Triestino (2013)**: сходимость метрик для мультипликативных каскадов на иерархических графах.

Спасибо за внимание!