О теореме Дирихле о единицах

Лекция 2: Цепные дроби. Существование решения уравнения Пелля.

Артём Авилов, Никон Курносов

План лекции: *В этой лекции мы докажем теорему о существовании решений уравнения Пелля $x^2 - qy^2 = 1$. Вспомнив про уже встречавшиеся нам цепные дроби, мы увидим, что отношение $\frac{x}{y}$ решений уравнения Пелля является подходящими дробями к $\sqrt{q}$.*

1 Цепные дроби

Любое нецелое число α можно представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1},$$

где α_0, а $\alpha_1 > 1$. Действительно, в качестве α_0 берём просто целую часть, а в качестве α_1 - обратное число к его дробной части, если оно оказалось нецелым, то его в свою очередь можно представить в виде $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$. В результате получим представление α в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{\alpha_n}}}$$

Определение 1.1 *Пусть α иррациональное число. Оно называется квадратично иррациональным, если оно является корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами. Второй корень этого многочлена β называется сопряжённым к α.*

Определение 1.2 *Пусть $[a_0, a_1, a_2, ...]$ - цепная дробь, такая что $a_n = a_{n+l}$ для достаточно больших n и фиксированного положительного l. Тогда эта дробь называется периодичной с периодом l.*

Теорема 1.3 *Иррациональное число является квадратично иррациональным титтк его цепная дробь периодична.*

Определение 1.4 *Пусть α квадратично иррациональное число. Оно называется приведённым, если $\alpha > 1$ и $-1 < \beta < 0$.*

Теорема 1.5 *Пусть α иррациональное. Тогда α чисто периодична титтк α приведённое. Если $\alpha = \overline{[a_0, a_1, ..., a_n]}$ и β его сопряжённое, то $-\frac{1}{\beta} = \overline{[a_{l-1}, ..., a_2, a_1]}$.*

2 Существование решения уравнения Пелля

Прежде, чем показать существование решения Уравнения Пелля, докажем теорему Дирихле о приближении.

Теорема 2.1 *Для любого q, не являющегося полным квадратом, и целого $B > 1$, существуют целые a и b, такие что $0 < b < B$ и*

$$|a - b\sqrt{q}| < \frac{1}{B}.$$

Доказательство: Рассмотрим $B - 1$ иррациональное число

$$\sqrt{q}, 2\sqrt{q}, ..., (B-1)\sqrt{q}.$$

Для любого числа вида $k\sqrt{q}$ возьмём натуральное a_k, такое что

$$0 < a_k - k\sqrt{q} < 1.$$

Разобьём интервал $[0, 1]$ на B подынтервалов длины $\frac{1}{B}$.Тогда по принципу Дирихле какие-то два из $B + 1$ чисел $0, a_k - k\sqrt{q}, 1$ лежат в одном интервале. А значит их разность отличается менее, чем на $\frac{1}{B}$ $\square$

Следствие 2.2 ***(Теорема Дирихле о приближении иррациональных чисел)*** *Для любого иррационального числа α существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{a}{b}$ (a и b взаимно просты), таких что*

$$|\frac{a}{b} - \alpha| < \frac{1}{b^2}$$

Доказательство: Выше мы получили, что

$$|a - b\alpha| < 1/B.$$

Разделим обе части на b, а затем воспользуемся тем, что $b < B$, получаем

$$|\frac{a}{b} - \alpha| < \frac{1}{Bb} < \frac{1}{b^2}.$$

Это даёт нам существование хотя бы одной такой пары (a, b). Чтобы показать, что их бесконечно много, заметим, что очевидным образом $|a - b\alpha|$ всегда больше 0. Тогда можно взять число B_2, такое что

$$\frac{1}{B_2} < |a - b\alpha|,$$

значит, можно найти новую пару (a_2, b_2), такую что

$$|a - b\alpha| < \frac{1}{B_2}$$

. Действуя аналогично, получим бесконечно много пар (a, b), удовлетворяющих

$$|\frac{a}{b} - \alpha| < \frac{1}{b^2}.$$

□

Следствие 2.3 ***(Существование решения уравнения Пелля)*** *Для любого q, не являющегося полным квадратом, уравнение Пелля имеет нетривиально решение в целых числах.*

Доказательство:

Шаг 1.

Пусть (a, b) удовлетворяет $|a - b\sqrt{q}| < \frac{1}{b}$. Заметим, что

$$|a + b\sqrt{q}| \leq |a - b\sqrt{q}| + |2b\sqrt{q}| \leq 3b\sqrt{q}.$$

Тогда

$$|a^2 - qb^2| = |a + b\sqrt{q}||a - b\sqrt{q}| \leq 3\sqrt{q}.$$

И, значит, существует бесконечно много пар (a, b), таких, что $|a^2 - qb^2| \leq 3\sqrt{q}$.

Шаг 2.

Для произвольной пары (a, b) величина $|a^2 - qb^2|$ является целым числом и по предыдущему шагу существует бесконечно много пар, для которых она меньше $3\sqrt{q}$. Значит по всё тому же принципу Дирихле существует бесконечно много решений уравнения $a^2 - qb^2 = m$. Более того, заметим, что существует всего m^2 возможных пар остатков при делении на m, а значит существует бесконечно много пар (a, b), являющихся решениями уравнения $a^2 - qb^2 = m$ и таких, что все $a \equiv a_0(m)$ и $b \equiv b_0(m)$.

Шаг 3.

Возьмём две такие пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), такие что

- $a_i^2 - qb_i^2 = m, i = 1, 2;$
- $a_2 \equiv a_1(m)$ и $b_2 \equiv b_1(m)$.

Их существование мы доказали на предыдущем шаге. Тогда

$$\frac{a_1 - b_1\sqrt{q}}{a_2 - b_2\sqrt{q}} = \frac{(a_1 - b_1\sqrt{q})(a_2 + b_2\sqrt{q})}{a_2^2 - qb_2^2} = \frac{a_1a_2 - qb_1b_2}{m} + \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{m}\sqrt{q}.$$

Заметим, что a и b целые числа. Действительно,

$$a_1a_2 - qb_1b_2 \equiv a_1a_1 - qb_1b_1 \equiv 0(m).$$

Аналогично для b.

Шаг 4.

С помощью вычислений можем получить, что $a^2 - qb^2 = (a - b\sqrt{q})(a + b\sqrt{q}) = 1$. Таким образом, мы получили решение уравнения Пелля.

$\square$

Теорема 2.4 *Если для целых a и b ($b > 0, (a, b) = 1$) выполняется неравенство*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2},$$

то $\frac{a}{b}$ - одна из подходящих дробей к α.

Доказательство:

Шаг 1.

Лемма 2.5 *Если $|p - q\alpha| < |p_n - q_n\alpha|$ и $0 < q < q_{n+1}$, то $p = p_n, q = q_n$.*

Шаг 2. Действуем от противного. Пусть $\frac{p}{q}$ - это не подходящая дробь. Выберем n так, чтобы $q_n < q < q_{n+1}$. Если $|p - q\alpha| < |p_n - q_n\alpha|$, то мы победили по лемме в шаге 1. Значит, $|p - q\alpha| \geq |p_n - q_n\alpha|$. Следовательно, $|p_n - q_n\alpha| \geq \frac{1}{2q}$. Далее,

$$|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}| \geq |\frac{p}{q} - \alpha| + |\frac{p_n}{q_n} - \alpha| < \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2q_nq} \geq \frac{1}{qq_n}.$$

С другой стороны,

$$|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n},$$

и знаменатель либо 0, либо натуральное число, а значит получаем противоречие с неравенством чуть выше. $\square$

2.1 Общий вид решения и связь с цепными дробями

Определение 2.6 *Пусть α действительное число. Опредилим рекурсивный алгоритм следующим образом:*

$$\alpha_0 = \alpha, a_n = [\alpha_n], \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - [\alpha_n}$$

Это тот самый алгоритм, по которому мы строили цепные дроби.

Теорема 2.7 *Если d не полный квадрат и α_n - последовательность чисел, определённая выше для $\alpha = \sqrt{d}$. Тогда*

- *для неотрицательных n существуют целые P_n и Q_n, такие что $\alpha_n = \frac{P_n+\sqrt{d}}{Q_n}$ и что $d - P_n^2$ делится на Q_n.*
- *Для любого $n \leq 2$ и подходящей дроби $\frac{p_n}{q_n}$ к α имеем*

$$p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1} Q_{n+1}.$$

Доказательство:

- Будем действовать по индукции. Для $n = 0, \alpha_0 = \sqrt{d}, Q_0 = 1, P_0 = 0$. Для $n = 1$,
$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{d} - [\sqrt{d}]} = \frac{\sqrt{d} + [\sqrt{d}]}{d - [\sqrt{d}]^2}.$$
Что даёт нам значения P_1 и Q_1. Теперь проведём шаг индукции:
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{Q_n}{P_n + \sqrt{d} - a_n Q_n} = \frac{\sqrt{d} - P_n + a_n Q_n}{\frac{d-(P_n - a_n Q_n)^2}{Q_n}} := \frac{P_{n+1} + \sqrt{d}}{Q_{n+1}}.$$
В этом случае, $P_{n+1} = a_n Q_n - P_n$ (очевидно целое) и $Q_{n+1} = \frac{d-(P_n-a_nQ_n)^2}{Q_n} = \frac{d-P_n^2}{Q_n} + 2a_nP_n - a_n^2 Q_n$. По утверждению индукции $d - P_n^2$ делится на Q_n, следовательно Q_n - целое. Осталось доказать, что $d - P_{n+1}^2$ делится на Q_{n+1}. Действительно,
$$Q_n = \frac{d - (P_n - a_n Q_n)^2}{Q_{n+1}} = \frac{d - P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$
целое число, а значит и $d - P_{n+1}^2$ делится на Q_{n+1}.
-
$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{P_{n+1}+\sqrt{q}}{Q_{n+1}} p_n + p_{n-1}}{\frac{P_{n+1}+\sqrt{q}}{Q_{n+1}} q_n + q_{n-1}}.$$

Из этого получаем, что

$$dq_n + \sqrt{d}(P_{n+1}q_n + q_{n-1}Q_{n+1}) = (P_{n+1}p_n + p_{n-1}Q_{n+1}) + \sqrt{d}p_n.$$

Таким образом,

$$p_n^2 - dq_n^2 = Q_{n+1}(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1}) = (-1)^{n+1}Q_{n+1},$$

где последнее равенство следует из следующей выкладки:

$$p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} - (a_nq_{n-1} + q_{n-2})p_{n-1}$$

$$= (-1)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2}) = ... = (-1)^{n-1}.$$

□

Следствие 2.8 *Если l период цепной дроби для $\sqrt{d}$, то $Q_n = 1$ титтк n кратно l.*

Доказательство:

Во-первых, $\alpha_1 = \alpha_{n+1}$ титтк n кратно l. $\Rightarrow$ По только что доказанной теореме имеем $\alpha_n = P_n + \sqrt{d}$. Поскольку α_n квадратично иррационально, то по Теореме Лагранжа её цепная дробь периодична, а, значит, по теореме Галуа, α_n приведённое. Следовательно, для сопряжённого к α_n выполнено

$$-1 < \beta_n = P_n - \sqrt{d} < 0,$$

что даёт

$$\sqrt{d} - 1 < P_n < \sqrt{d},$$

т.к. P_n - целое, то $P_n = [\sqrt{d}]$. Значит, по нашей рекурсивной формуле: $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - [\alpha_n]}$. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_{n+1}$ и победа.

$\Leftarrow$ Пусть $n = kl$, тогда

$$\frac{P_{kl} + \sqrt{d}}{Q_{kl}} = \alpha_{kl} = [0, a_1, a_2, \bar{...}, a_{l-1}] = \sqrt{d} - [\sqrt{d},$$

Следовательно, $Q_{kl} = 1$. □

Определение 2.9 *Для данного уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ решение (x, y) называется минимальным (фундаментальным), если оно положительное и x минимально.*

Теорема 2.10 *Пусть n - минимальный период цепной дроби $\sqrt{d}$. Тогда*

- *Минимальное решение уравнения Пелля имеет вид:*

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p_{l-1}, q_{l-1}), \text{ если } l \text{ чётно,} \\ (p_{2l-1}, q_{2l-1}), \text{ если } l \text{ нечётно} \end{cases}$$

- *Все решения (x, y) уравнения Пелля (с точностью до знака) являются степенями минимального (x_1, y_1):*

$$x + y\sqrt{d} = \pm(x_1 + y_1\sqrt{d})^{\pm n}.$$

Прежде чем доказать эту теорему вспомним, что в случае уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$ мы заметили, что можно из решений (1, 0) и (3, 2) получать другие положительные решения следующим способом $(x, y) \to (3x+4y, 2x+3y)$. Оказывается так можно действовать во всех случаях.

Определение 2.11 *(произведение Брахмагупты) Если (x_1, y_1) и x_2, y_2 решения уравнений*

$$x_1^2 - qy_1^2 = a, x_2^2 - qy_2^2 = b,$$

то их произведение

$$(x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 + qy_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

является решением уравнения

$$x_3^2 - qy_3^2 = ab.$$

Проверку корректности этого определения оставим в качестве упражнения.

Доказательство: **(Теорема 2.10)**

Мы уже знаем, что решения уравнения Пелля являются подходящими дробями для $\sqrt{d}$. Значит нам надо узнать, когда $Q_n = \pm 1$. Из прошлого следствия мы знаем, что $Q_n = 1$ титтк n кратно l. Более того, $Q_n \neq -1$ для всех положительных n. Действительно, пусть это не так, тогда по Теореме 2.7 имеем, что $\alpha_n = -P_n - \sqrt{d}$ и так как оно квадратично иррационально, то по теореме Галуа, получаем, что

$-1 < -P_n + \sqrt{d} < 0$ и $1 < -P_n - \sqrt{d}$,

откуда получаем $\sqrt{d} < \frac{1}{2}$, что невозможно. Таким образом, минимальное решение получаем, взяв минимальное нечётное кратное числа l минус 1. Первый пункт доказан.

Для доказательства второго пункта заметим, что достаточно получить положительные решения. Действительно, менять знаки у x, y можно, умножая на -1 или используя степени:

$$\frac{\pm 1}{x + y\sqrt{d}} = \frac{\pm(x - y\sqrt{d})}{x^2 - dy^2} = \pm x \mp y\sqrt{d}.$$

Обозначим минимальное решение $x_1 + y_1\sqrt{d}$ за ϵ. Возьмём некоторое положительное решение, тогда существует n, такое что $\epsilon^n \leq x + y\sqrt{d} < \epsilon^{n+1}$. Возьмём, $X + Y\sqrt{d} = \epsilon^{-n}(x + y\sqrt{d})$. Очевидно, что $\epsilon > X + Y\sqrt{d} \geq 1$. Пусть оно строго больше. Тогда сопряжённое к нему имеет вид $X - Y\sqrt{q} = \epsilon^n(x - y\sqrt{d})$. Значит,

$$(X - Y\sqrt{q})(X + Y\sqrt{q}) = X^2 - dY^2 = 1.$$

Помимо этого имеем очевидные неравенства:

$$0 < \epsilon^{-1} < (X + Y\sqrt{d}) = X - Y\sqrt{d} < 1,$$

$$\Rightarrow \ 2X = (X - Y\sqrt{q}) + (X + Y\sqrt{q}) > 1 + \epsilon^{-1} > 0.$$

Аналогично,

$$2Y\sqrt{d} = (X + Y\sqrt{q}) - (X - Y\sqrt{q}) > 0.$$

Таким образом, $(X + Y\sqrt{q})$ также положительное решение, причём оно меньше минимального. Следовательно, предположение, что $X + Y\sqrt{q} > 1$ неверно и выполнено $X + Y\sqrt{q} = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Пример 2.1 *Опять же рассмотрим уравнение Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$, для него минимальное решение -* $(3, 2)$*, его квадрат* $(17, 12)$*, следующее -* $(99, 70)$*. Таким образом,*

$$\frac{3}{2} = 1.5,$$
$$\frac{17}{12} = 1.41\bar{6},$$
$$\frac{99}{70} = 1.4\overline{1428757} \approx \sqrt{2} = 1.4142135623...$$

Как мы уже знаем, в случае уравнения Пелля $a^2 - qb^2 = 1$ положительные решения являются подходящими дробями к числу $\sqrt{q}$. Возникает естественным образом обратный вопрос, а именно, какие подходящие дроби являются решениями уравнения Пелля. Ответ даёт следующее

Следствие 2.12 *Пусть n - длина периода последовательности цепной дроби для числа $\sqrt{q}$. Тогда числитель и знаменатель подходящей дроби для $\sqrt{q}$ являются решением уравнения Пелля $a^2 - qb^2 = 1$ титтк номер этой подходящей дроби сравним с $n - 1$ по модулю n и нечётен.*

Доказательство: Доказательство следует из Теоремы 2.7 и предыдущей Теоремы 2.10. $\square$

Замечание 2.13 *Тут можно немного рассказать и о теореме Рота (теорема 10 из 4400pellnotes(1).pdf*