

Три взгляда на ацтекский бриллиант

Е. Ю. Смирнов

АННОТАЦИЯ. Записки миникурса, прочитанного на XIV летней школе «Современная математика», Дубна, 19–30 июля 2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1. Взгляд первый: знакопеременные матрицы	6
1.1. Заполнение и конфигурация стрелок	6
1.2. Чередование	7
1.3. Знакопеременные матрицы	9
1.4. Гипотеза о знакопеременных матрицах и квадратный лед	11
1.5. Функция высоты	14
1.6. Восстановление разбиения по знакопеременной матрице	18
1.7. Все знакопеременные матрицы соответствуют заполнениям	20
1.8. Завершение доказательства теоремы об ацтекском бриллианте	23
2. Взгляд второй: совершенные паросочетания на графах	24
2.1. Совершенные паросочетания и заполнения	24
2.2. Взвешенные суммы	24
2.3. Лемма о расширении площадей	26
2.4. Подсчет числа совершенных паросочетаний ацтекского бриллианта	28
3. Взгляд третий: числа Шредера и непересекающиеся пути	31
3.1. Числа Шредера	31
3.2. Наборы непересекающихся путей Шредера	33
3.3. Наборы путей и заполнения ацтекского бриллианта	37
3.4. Числа Деланнуа и «утолщенный бриллиант»	38
4. Заключение. А что еще бывает?	40
4.1. Треугольная решетка	40
4.2. Асимптотические задачи	41
Список литературы	43

ВВЕДЕНИЕ

Замощения доминошками. Рассмотрим какую-либо область на бумаге в клетку. Замощение доминошками — это способ разбить эту область на прямоугольники 2×1 так, чтобы они покрывали бы всю область и никакие два прямоугольника не имели бы общих внутренних точек (т.е. не накладывались бы), а пересекались бы только по границе.

Вот самый простой пример. Возьмем прямоугольник размера $2 \times n$. Тогда количество способов замостить его доминошками равно n -му числу Фибоначчи. Доказать это можно по индукции. Действительно, пусть $F(n)$ — число способов замостить прямоугольник $2 \times n$. Возьмем доминошку, покрывающую левый верхний угол прямоугольника. Тогда она может быть либо вертикальной, и оставшаяся часть прямоугольника можно замостить $F(n - 1)$ способами, либо горизонтальной — тогда две клетки под ней тоже будут заняты горизонтальной доминошкой, и останется замостить прямоугольник $2 \times (n - 2)$. Мы получили рекуррентное соотношение:

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2).$$

А поскольку первые два члена у этой последовательности равны единице: $F(0) = F(1) = 1$, это и есть последовательность Фибоначчи.

Следующий вопрос, который возникает после этого — сколькими способами можно замостить доминошками прямоугольник произвольного размера $m \times n$? Это уже оказывается весьма непростой задачей, которая была решена в 1961 году Кастелейном и независимо Темперли и Фишером. Они доказали, что число замощений такого прямоугольника задается следующей, довольно замысловатой, формулой:

$$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)^{1/4}$$

Доказательство этого факта можно прочесть, например, в статье [3]. Однако мы это утверждение обсуждать не будем, а вместо этого рассмотрим задачу о замощении другой фигуры — квадрата, только повернутого на 45° .

Ацтекский бриллиант. Рассмотрим множество квадратиков на клетчатой бумаге, координаты (x, y) центров которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n$, где n — целое положительное число.

Числа x и y при этом мы считаем полуцелыми. Будем называть такую фигуру *ацтекским бриллиантом*¹ размера n ; на рис. 0.1 изображен ацтекский бриллиант размера 4 и пример его замощения доминошками.

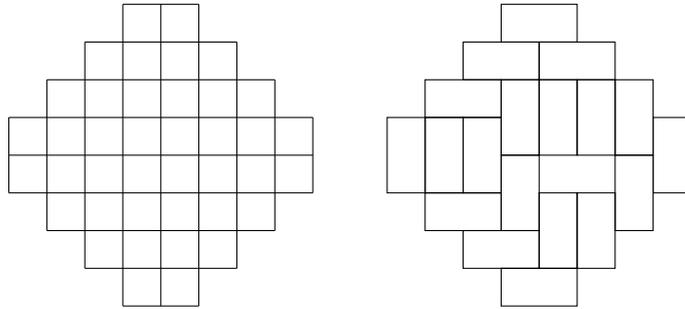


Рис. 0.1. Ацтекский бриллиант размера 4 и пример его замощения

Сколько существует способов замостить доминошками ацтекский бриллиант размера n ? Можно попробовать посчитать это количество вручную при малых n . При $n = 1$ ацтекский бриллиант — это просто квадрат 2×2 , который, очевидно, можно замостить двумя способами. При $n = 2$ найти все замощения вручную тоже несложно (проделайте это!); их оказывается 8. При дальнейшем росте n число замощений очень быстро растет: так, при $n = 3$ их уже оказывается 64, так что перечислить их все — задача не безнадежная, но при ручном переборе требующая некоторого терпения (или умения программировать). Однако при $n = 4$ обойтись без компьютера уже значительно сложнее: замощений оказывается 1024.

Итак, число замощений ацтекского бриллианта оказывается степенью двойки: $2, 2^3, 2^6, 2^{10} \dots$. По приведенному фрагменту последовательности можно догадаться, чему равны показатели степени: это треугольные числа, т.е. суммы вида $1 + 2 + \dots + n$ — иначе говоря, $n(n+1)/2$. Это и составляет утверждение теоремы об ацтекском бриллианте.

Теорема (об ацтекском бриллианте). *Число замощений ацтекского бриллианта размера n костяшками домино размера 1×2 равняется $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*

Мы докажем эту теорему тремя принципиально разными способами.

Как устроена эта брошюра. Три последующие главы этой брошюры посвящены трем разным доказательствам теоремы об ацтекском бриллианте. Эти три доказательства основаны на разных

¹В литературе также встречается термин «ацтекский диамант», на наш взгляд, менее удачный.

идеях и методах; наша цель состоит в первую очередь в том, чтобы продемонстрировать, как эти методы работают. Читать (или не читать) эти три доказательства можно независимо друг от друга. Вкратце расскажем о каждом из них.

В *первом доказательстве* с каждым из замощений ацтекского бриллианта связывается пара квадратных матриц специального вида, так называемых *знакочередующихся матриц*, которые дополнительно удовлетворяют некоторым условиям совместности. Задача о подсчете числа замощений тем самым сводится к подсчету числа пар таких матриц. Это первое опубликованное доказательство теоремы об ацтекском бриллианте; оно появилось в 1992 году в работе Ноама Элкиса, Грега Куперберга, Майкла Ларсена и Джима Проппа [9] и [10]. Хотя это и не имеет непосредственного отношения к нашему основному сюжету, мы также упоминаем *гипотезу о знакочередующихся матрицах*, которая долгое время привлекала внимание специалистов по комбинаторике и была доказана независимо Д. Зельбергером и Г. Купербергом в середине 1990-х гг.

Второе доказательство, принадлежащее Джиму Проппу [16], основано на подсчете числа так называемых димерных конфигураций, или совершенных паросочетаний графов — то есть числа способов разбить вершины графа на пары так, чтобы вершины в каждой паре были бы соединены ребром. Ключевым инструментом для этого будет операция расширения площадей (urban renewal), позволяющая сводить графы, с которыми мы будем работать, к более простым. Это рассуждение на простом примере демонстрирует методы, используемые при работе с димерами в значительно более сложных задачах математической физики. А сама операция расширения площадей, как было недавно показано А. Б. Гончаровым и Р. Кеньоном [12], неожиданным образом возникает и в других задачах, в частности, в таком новом и бурно развивающемся направлении математики, как теория кластерных алгебр.

Наконец, *третье доказательство* теоремы об ацтекском бриллианте, о котором пойдет речь, сводит подсчет числа замощений бриллианта к нахождению числа наборов путей определенного вида на решетке. При этом число этих путей выражается как некоторый определитель. Для этого используется такой полезный комбинаторный прием, как метод непересекающихся путей Линдстрема–Гесселя–Вьенно. Это доказательство опубликовали в 2005 году тайваньские математики Сэнь-Пен Эу и Тун-Шань Фу [11]. При этом используемое в доказательстве соответствие между замощениями и наборами путей упоминается и в более ранних работах, в частности, в книге Стенли [7, упр. 6.49].

Благодарности. Эта брошюра написана по материалам одноименного миникурса из трех лекций, прочитанных мною на XIV летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2014 г. школьникам старших классов и студентам младших курсов. Я благодарен организаторам школы за приглашение прочесть этот курс и всем слушателям за активное участие и многочисленные содержательные комментарии и обсуждения.

При подготовке брошюры я постоянно получал неоценимую помощь и поддержку от В. А. Клепцына и Г. А. Мерзона, которых фактически можно считать не редакторами, а соавторами этого текста. Кроме того, я признателен всем, кто высказывал отзывы по поводу предварительной версии брошюры: И. И. Богданову, А. Г. Кузнецову, Ф. В. Петрову и многим другим. Наконец, я хочу поблагодарить фонд «Династия» и фонд Дж. Саймонса за частичную финансовую поддержку.

Я буду рад получить отзывы, замечания и комментарии от читателей. Направлять их можно по адресу esmirnov@hse.ru.

Видеоматериалы прочитанного в Дубне курса доступны в видеотеке сайта MathNet, <http://www.mathnet.ru>.

1. Взгляд ПЕРВЫЙ: ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ МАТРИЦЫ.

Рассмотрим какое-нибудь замощение ацтекского бриллианта. Нам будет удобно считать, что оно расположено на плоскости, которая целиком заполнена доминошками, причем снаружи от бриллианта замощение является *регулярным*. Регулярное замощение строится так: каждую из полуплоскостей сверху и снизу от оси абсцисс заполним «кирпичной кладкой», как показано на рисунке (см. рис. 1.1). Таким образом, интересующие нас замощения ацтекского бриллианта можно рассматривать как замощения *всей плоскости*, которые отличаются от регулярного замощения лишь в пределах конечного участка — собственно бриллианта.

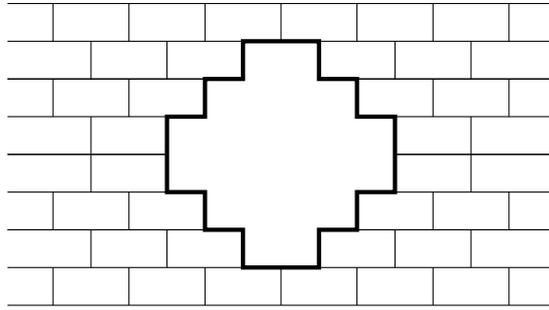


Рис. 1.1. Регулярное замощение

1.1. Замощение и конфигурация стрелок. В этом разделе мы построим по замощению ацтекского бриллианта доминошками другой связанный с ним комбинаторный объект — конфигурацию стрелок (см. рис. 1.2). Эта конфигурация будет удовлетворять некоторым довольно простым условиям — в частности, в любую вершину входят и выходят ровно две стрелки. Такие конфигурации в физике известны под названием «шестиугольной модели», поскольку для каждой вершине есть $\binom{4}{2} = 6$ вариантов ориентировать касающиеся ее стрелки. Нам же такая конфигурация понадобится при доказательстве основной теоремы; мы обсудим физический смысл таких конфигураций чуть позже, в разделе 1.4, а пока перейдем к собственно построению.

Будем считать, что узлы решетки, на которой нарисован ацтекский бриллиант, раскрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке так, что точка $(-n, 0)$ является белой. При этом окажется, что на границе каждого прямоугольника 2×1 есть ровно по три белых и черных вершины.

Рассмотрим какое-нибудь замощение и нарисуем на каждой из входящих в него доминошек две диагонали, каждая из которых будет соединять две белые вершины, в форме буквы «V». Расставим на этих диагоналях стрелки, выбрав направления по следующему правилу: если диагональ идет с юго-востока на северо-запад,

поставим стрелку в направлении от угла доминошки к середине противоположной стороны. Для диагонали, идущей с юго-запада на северо-восток, напротив, поставим стрелку в направлении от середины стороны к углу. В итоге получим картину наподобие изображенной на рис. 1.2.

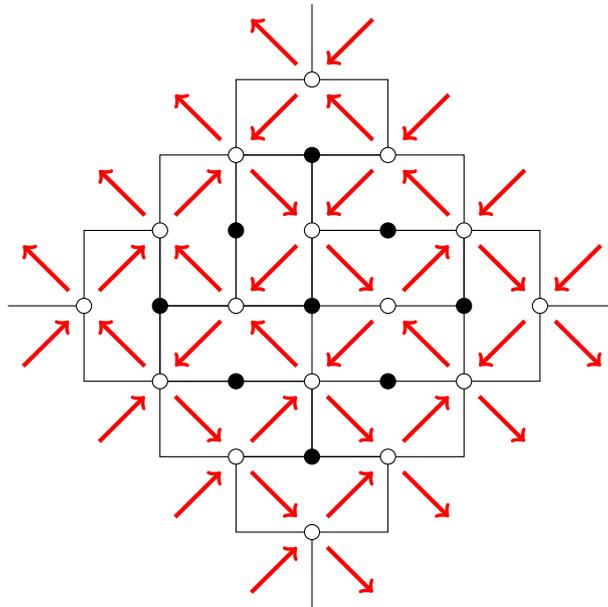


Рис. 1.2. Набор стрелок, построенный по разбиению

Сформулируем несколько свойств такого набора стрелок.

Предложение 1.1. *В каждую из вершин входят и из каждой вершины исходят ровно по две стрелки.*

Доказательство. Докажем это, рассмотрев все случаи того, как в белой вершине могут сходиться две, три или четыре доминошки. Они показаны на следующем рисунке.

□

Следующее наблюдение также очевидно следует из нашего построения. А именно, заметим, что вне пределов ацтекского бриллианта — там, где замощение является регулярным — расстановка стрелок также устроена регулярным образом: а именно, в верхней полуплоскости все стрелки, не лежащие внутри квадрата $\pm x \pm y \leq n$, направлены «влево» (т.е. на северо-запад и юго-запад), а во второй и четвертой, наоборот, «вправо» (т.е. на северо-восток и юго-восток). На рисунке изображен только первый ряд таких стрелок.

1.2. Чередование. Возьмем какое-нибудь замощение ацтекского бриллианта (продолженное до замощения всей плоскости), на котором расставлены стрелки, как сказано в предыдущем разделе. В

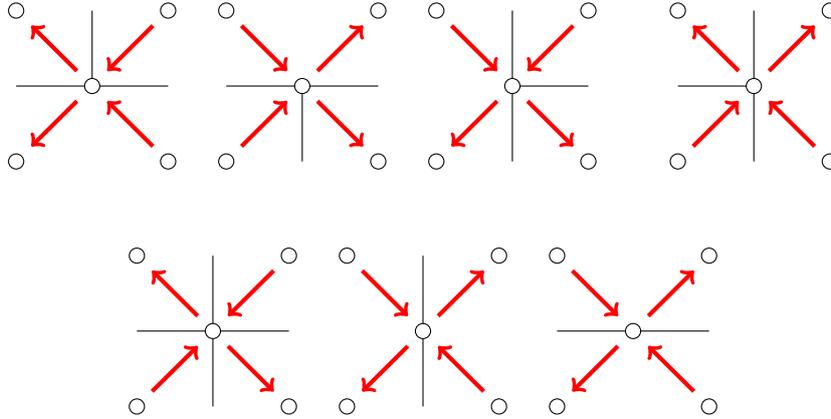


Рис. 1.3. Семь способов примыкания диагоналей

каждой из белых вершин замощения сходятся две, три или четыре доминошки. Поставим в каждой из этих вершин число, равное количеству сходящихся там доминошек минус три. Иначе говоря, если в узле сходятся четыре доминошки, поставим там 1, если три — то 0, а если две, то -1 . Легко видеть, как будут расставлены числа вне бриллианта: они все будут равны нулю, кроме чисел на горизонтальной оси симметрии бриллианта, на которой будут чередоваться единицы и минус единицы.

Следующее наблюдение окажется для нас ключевым.

Лемма 1.2. *Рассмотрим последовательность чисел, стоящих на произвольной диагонали (см. рис. 1.4). Тогда в этой последовательности единицы и минус единицы чередуются (при этом между ними может быть произвольное число нулей).*

Доказательство. Рассмотрим диагональ, идущую с юго-запада на северо-восток. Она проходит по нескольким доминошкам и на каждой из них соединяет один из углов с серединой противоположной стороны. По построению, направленные вдоль этой диагонали стрелки указывают в угол доминошки, как показано на рис. 1.4. Заметим, что в вершине стоит единица, если в нее входят две стрелки, направленные вдоль этой диагонали, нуль, если одна стрелка в нее входит, а одна выходит, и минус единица, если обе стрелки из нее выходят (в этом легко убедиться, посмотрев на рис. 1.3).

Таким образом, узлы, в которых стоят единицы и минус единицы, соответствуют местам, где последовательность стрелок меняет направление. При этом единицы соответствуют «стокам», то есть узлам, для которых обе стрелки являются входящими, а минус единицы — «источникам», для которых обе стрелки исходящие. Ясно, что такие узлы чередуются, а это и составляет утверждение леммы.

Случай диагонали, идущей с юго-востока на северо-запад, отличается лишь направлением стрелок, но ясно, что на чередование единиц и минус единиц это не влияет. \square

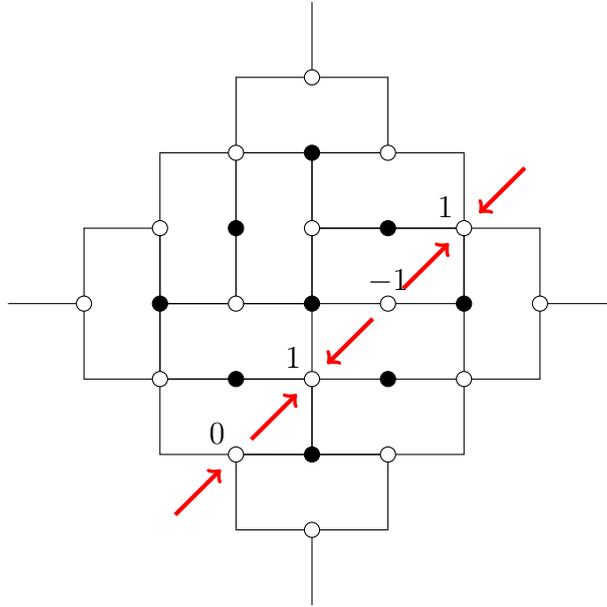


Рис. 1.4. К доказательству чередования знаков

Кроме того, ясно, что расстановка чисел в узлах, лежащих вне бриллианта, всегда будет одной и той же: а именно, во всех узлах вне оси абсцисс будут записаны нули, а на оси абсцисс — единицы. Таким образом, можно считать, что числа 1, 0 и -1 расставлены на белых вершинах по всей плоскости.

Лемма 1.3. *Сумма всех чисел на каждой диагонали равна 1.*

Доказательство. Рассмотрим диагональ, идущую с юго-запада на северо-восток (см. рис. 1.4). Посмотрим на то, как она пересекает регулярную часть замощения. Как мы уже отмечали, все стрелки на ее участке слева-снизу от бриллианта будут смотреть на северо-восток (т.е. вправо-вверх), то есть первым ненулевым числом на этой диагонали будет единица. Аналогично на участке справа-сверху от бриллианта все стрелки будут направлены на юго-запад, то есть и последним ненулевым числом в последовательности также будет единица. А поскольку единицы и минус единицы чередуются, то сумма всех чисел на диагонали будет равна 1.

Случай другого направления диагонали рассматриваются аналогично. \square

1.3. Знакопередающиеся матрицы. *Знакопередающаяся матрица* — это квадратная матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

- все элементы матрицы равны либо 0, либо ± 1 ;
- ненулевые элементы в каждой строке и каждом столбце чередуются: за единицей идет минус единица, и наоборот (при этом между ними может быть произвольное число нулей);
- сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна 1; иначе говоря, единиц на одну больше, чем минус единиц.

Пример 1.4. Зафиксируем некоторую перестановку $\sigma \in S_n$ и рассмотрим матрицу этой перестановки, т.е. такую матрицу (a_{ij}) , для которой $a_{ij} = 1$ при $i = \sigma(j)$ и 0 в противном случае. Такая матрица будет знакопеременной. Всего таких матриц будет столько же, сколько перестановок, т.е. $n!$.

Пример 1.5. Вот пример знакопеременной матрицы, не являющейся матрицей перестановки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 1.6. Выпишите все знакопеременные матрицы порядка три.

Вернемся к замощениям. Рассмотрим некоторое замощение ацтекского бриллианта размера n и расставим в его узлах числа 1, 0 и -1 так, как это было описано в предыдущем разделе. Множество всех белых вершин внутри ацтекского бриллианта будет образовывать квадрат $(n+1) \times (n+1)$. Повернем его на 45° по часовой стрелке и рассмотрим все значения в вершинах; они образуют квадратную матрицу порядка $n+1$, которую мы обозначим через A .

Предложение 1.7. Матрица A является знакопеременной матрицей порядка $n+1$.

Доказательство. Это напрямую следует из лемм 1.2 и 1.3. \square

Далее, ту же самую конструкцию, которая была описана в разделах 1.1 и 1.2, можно провести для черных вершин. Так, для них можно нарисовать по две стрелки на каждой доминошке по тому же правилу и расставить числа 1, 0 и -1 в вершинах, следуя обратному соглашению: 1 будет соответствовать вершине, в которой сходятся две доминошки, а -1 — вершине, в которой граничат четыре доминошки. Точно так же доказывается, что матрица из чисел, стоящих в черных вершинах, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n-1$, также будет знакопеременной матрицей порядка n . Обозначим эту матрицу через B .

Пример 1.8. Замощению, изображенному на рис. 1.4, соответствуют следующие знакопеременные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по замощению ацтекского бриллианта размера n мы научились строить две знакопеременные матрицы: A и B , порядка $n + 1$ и n соответственно.

1.4. Гипотеза о знакопеременных матрицах и квадратный лед. Этот раздел не имеет непосредственного отношения к нашему основному рассказу, и его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего материала.

В предыдущих разделах мы определили знакопеременные матрицы. Они возникли в связи с конфигурациями стрелок, введенными в разделе 1.1. Оказывается, что и такие конфигурации, и знакопеременные матрицы возникают в различных задачах статистической физики — в частности, в связи с так называемой моделью квадратного льда (square ice model).

Рассмотрим квадратную решетку на плоскости, в узлах которой расположены атомы кислорода. Пусть также между каждыми двумя соседними атомами кислорода (в середине соответствующего ребра) находится атом водорода. Допустим, что каждый из атомов кислорода соединен химическими связями ровно с двумя соседними атомами водорода, и они тем самым образуют молекулу воды — H_2O . Соответственно, каждый из атомов водорода должен быть задействован ровно в одной молекуле.

Ясно, что молекула воды может быть образована шестью разными способами — именно столько есть способов выбрать два атома водорода из четырех, смежных с данным атомом кислорода. В четырех из этих способов молекула выглядит как буква «Г» (возможно, повернутая); в оставшихся двух вариантах все три атома лежат на одной прямой — вертикальной или горизонтальной.

Далее, будем рассматривать нашу решетку не на всей плоскости, а на ее конечном участке, который мы будем считать квадратным со стороной n (то есть по каждой из сторон уместятся n атомов кислорода). Зададим также *граничные условия*: будем считать, что слева и справа от атомов кислорода, расположенных по левой и правой стороне квадрата соответственно, есть атомы водорода, а сверху и снизу от горизонтальных сторон квадрата, никаких атомов нет (см. рис. 1.5). Тем самым количество атомов водорода как раз равно $2n^2$, то есть вдвое больше атомов кислорода. Ясно, что способов расставить на такой решетке химические связи достаточно много. На рис. 1.6 изображен один из таких способов.

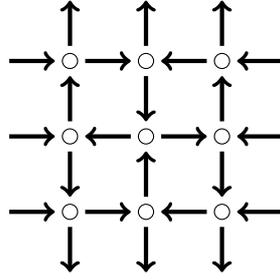


Рис. 1.7. Конфигурация стрелок, отвечающая «квадратному льду»

Мы получили уже известную нам конфигурацию, по которой можно построить знакочередующуюся матрицу, как это было описано выше. Обратите внимание, что граничные условия, утверждающие, что атомы водорода присутствуют слева и справа от граничных атомов кислорода, но отсутствуют сверху и снизу, соответствуют тому, что стрелки с левого и правого края направлены вовнутрь, а с верхнего и нижнего — наружу (см. раздел 1.2).

Конечно же, знакочередующуюся матрицу можно «увидеть» уже на рис. 1.6 следующим образом. Каждый атом кислорода отвечает элементу знакочередующейся матрицы, который равен 0, если молекула, в которую входит этот атом, имеет форму буквы «Г», 1, если молекула горизонтальна, и -1 , если она вертикальна. Тем самым конфигурации из предыдущего примера будет отвечать уже известная нам матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще одно, независимое определение знакочередующихся матриц связано с именами американских математиков Миллса, Роббинса и Рамси, которые в начале 1980-х гг. изучали деформации определителя матрицы (так называемые λ -определители). Более подробно об этом можно прочесть в брошюре [6] или книге [8]. Многочисленные компьютерные эксперименты позволили Миллсу, Роббинсу и Рамси сформулировать знаменитую *гипотезу о знакочередующихся матрицах* (по-английски — alternating sign matrix conjecture, или, короче, ASM-conjecture).

Гипотеза 1.9 (о знакочередующихся матрицах). *Количество знакочередующихся матриц размера $n \times n$ равняется*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-2)!}{(n)!(n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}$$

Эта гипотеза оставалась открытой в течение более 10 лет. В 1995 году она была доказана Дорном Зельбергером. Доказательство

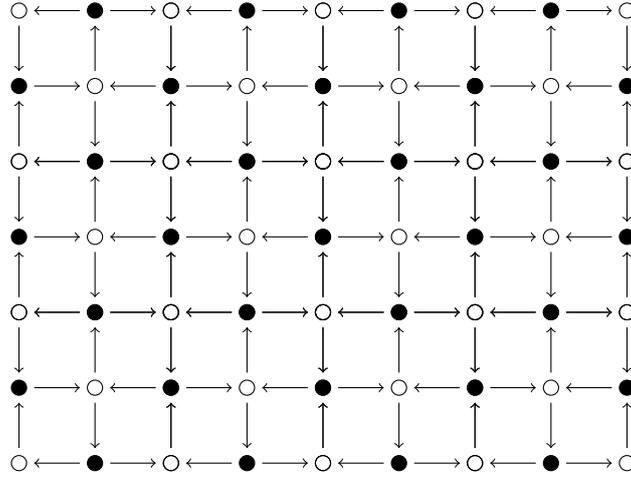


Рис. 1.8. Расстановка стрелок

было изложено на 84 страницах и было чрезвычайно сложным; его проверка заняла несколько лет и потребовала усилий 88 рецензентов. Годом позже появилось второе доказательство, уже гораздо более простое; оно принадлежало Грегу Купербергу и существенно опиралось на некоторые утверждения из математической физики (тогда как доказательство Зельбергера было чисто комбинаторным).

1.5. Функция высоты. Вернемся к задаче об ацтекском бриллианте. В этом разделе мы для каждого замощения построим некоторую функцию на решетке, которую будем называть функцией высоты.

Пусть G — бесконечный граф, вершинами которого являются узлы квадратной решетки на плоскости, а ребрами — отрезки, соединяющие соседние узлы. Рассмотрим раскраску вершин графа G в шахматном порядке в черный и белый цвета, которая уже пригодилась нам при построении знаочередующихся матриц: напомним, что при этом мы условились, что вершина с координатами $(-n, 0)$ является белой. Расставим на единичных отрезках между соседними узлами стрелки следующим образом: если отрезок горизонтален, направим стрелку от черного узла к белому; если же он вертикален, то от белого к черному. Таким образом, из четырех ребер, прилегающих к каждой вершине, два будут входящими, а два исходящими, причем входящие и исходящие ребра будут чередоваться (см. рис. 1.8). Иначе говоря, граница каждого из единичных квадратиков будет ориентирована либо по часовой стрелке, либо против.

Пусть нам дано некоторое замощение T ацтекского бриллианта доминошками, продолженное на остальную часть плоскости регулярным образом. Представим себе, что доминошки выложены по верх графа G . Тогда каждая из них закрывает одно ребро графа. Удалим из графа ребра, закрытые доминошками; тот граф, который останется, будем обозначать G_T .

Сопоставим замощению его *функцию высоты*² — это будет функция на вершинах графа G_T , которую мы будем обозначать H_T . Определим ее следующим образом. Положим высоту вершины $v_0 = (-n - 1, 0)$ равной нулю (эта вершина всегда является черной); далее, для каждой вершины v соединим v_0 с v путем; высота $H_T(v)$ будет равняться разности числа стрелок в положительном и отрицательном направлении, принадлежащих этому пути.

Следующее простое предложение утверждает, что функция высоты определена корректно.

Предложение 1.10. *Так определенное значение функции высоты $H_T(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v .*

Доказательство. Рассмотрим два пути γ_1 и γ_2 , соединяющие v_0 с v , и обозначим для любого пути γ через I_γ разницу количества попутных и противоположных стрелок при проходе вдоль него. Докажем, что значения функции высоты в v , построенные по путям γ_1 и γ_2 , равны — иными словами, что $I_{\gamma_1} = I_{\gamma_2}$. Для этого рассмотрим замкнутый контур γ_3 , получающийся, если мы сначала пройдем от v_0 к v по первому пути, а потом вернемся из v в v_0 вдоль второго, проходя его в обратном направлении. При прохождении пути в обратном направлении вклад каждой стрелки изменяет знак — поэтому $I_{\gamma_3} = I_{\gamma_1} - I_{\gamma_2}$, и мы хотим доказать, что $I_{\gamma_3} = 0$. На самом деле, мы докажем, что для *любого* замкнутого пути γ в графе G_T выполнено $I_\gamma = 0$.

Для этого сначала разрежем наш путь на несколько простых (т.е. несамопересекающихся) замкнутых путей (при необходимости удалив все стрелки, которые проходятся дважды в противоположных направлениях). Легко видеть, что при разрезании замкнутого пути γ на γ' и γ'' имеем $I_\gamma = I_{\gamma'} + I_{\gamma''}$; тем самым достаточно доказать наше утверждение для несамопересекающегося контура.

Без ограничения общности предположим, что наш контур γ обходится против часовой стрелки. Рассмотрим доминошки, лежащие внутри контура, и пусть $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ — замкнутые пути, отвечающие обходу их границ против часовой стрелки. Заметим, что тогда $I_\gamma = I_{\gamma'_1} + \dots + I_{\gamma'_n}$. Действительно, ребра, составляющие контур γ , будут в правой части посчитаны ровно один раз, а лежащие

²Почему функция высоты так называется, станет ясно в разделе 4.1, в котором пойдет речь о замощениях на треугольной решетке.

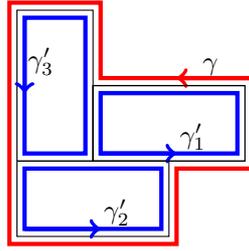


Рис. 1.9. Обход контура равносильен обходу всех входящих в него доминошек

внутри него будут посчитаны дважды с противоположными знаками и поэтому сократятся, как показано на рис. 1.9.

Но на границе любой доминошки три стрелки идут по часовой, а три против часовой стрелки — поэтому все слагаемые $I_{\gamma'_j}$ равны нулю. Предложение доказано. \square

Замечание 1.11. Подобное рассуждение используется при доказательстве очень многих утверждений: теоремы об индексе векторного поля, формулы Стокса, критерия потенциальности поля в физике и т.д. Даже в нашем рассказе оно встретится еще один раз, при доказательстве теоремы 1.16.

Пример 1.12. На рис. 1.10 показано замощение (то же самое, что и на рис. 1.4) и соответствующая ему функция высоты.

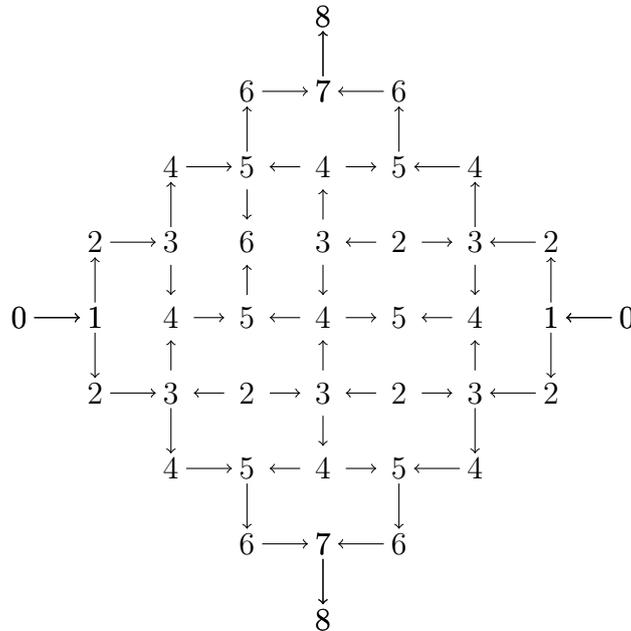


Рис. 1.10. Замощение и его функция высоты

Функция высоты удовлетворяет свойствам, которые мы сформулируем в виде следующего предложения. Будем называть *границей* ацтекского бриллианта множество точек, удовлетворяющих одному из условий: $|x| + |y| = n + 1$ (черные точки границы) или $|x| + |y| = n$ (белые точки границы).

Предложение 1.13. (1) В черных и белых точках границы функция высоты принимает соответственно значения $2|y|$ и $2|y| + 1$, где (x, y) — координаты точки на границе.
 (2) Пусть u и v — две соседние вершины, соединенные в графе G ребром, направленным от u к v . Тогда для любого замощения либо $H_T(v) = H_T(u) + 1$, если ребро uv в замощении T не закрыто доминошкой, либо $H_T(v) = H_T(u) - 3$ в противном случае.

Упражнение 1.14. Докажите эти свойства.

Из свойства (2) немедленно вытекает такое следствие:

Следствие 1.15. (1) Для любых двух вершин, расположенных в противоположных углах единичного квадрата, разность функций высоты равна ± 2 .
 (2) Для любых двух замощений $H_T(v) \equiv H_{T'}(v) \pmod{4}$.

Оказывается, предложение 1.13 является не только необходимым, но и достаточным условием: замощение можно однозначно восстановить по его функции высоты.

Теорема 1.16. Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G , удовлетворяющая свойствам (1) и (2) из предложения 1.13. Тогда $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T .

Доказательство. Единственность следует из такого простого соображения. Рассмотрим те ребра, разность функций высоты на концах которых равна единице. Эти ребра будут образовывать границы доминошек нашего разбиения; напротив, те ребра, разность функций высоты на концах которых равна минус трем, будут «закрыты» доминошками.

Далее, рассмотрим какую-нибудь клетку. Все стрелки на ее границе направлены в одном направлении: либо по часовой стрелке, либо против. Поскольку сумма приращений функции высоты при обходе этой клетки равна нулю, это значит, что существует ровно три ребра из четырех, для которых разность значений функции высоты на их концах равна единице, и одно ребро, для которого эта разность равна минус трем; оно и будет закрыто доминошкой. То же самое можно будет сказать и про клетку, смежную с данной по этому ребру. Тем самым все клетки окажутся разбитыми на пары, то есть в итоге действительно получится замощение ацтекского бриллианта. \square

Замечание 1.17. При доказательстве мы нигде не пользовались тем, что наша фигура является именно ацтекским бриллиантом. Поэтому теорема 1.16 будет верна в гораздо более общем случае: замощение восстанавливается по функции высоты для любой фигуры «без дырок» (как говорят топологи, *односвязной* фигуры). В частности, в качестве такой фигуры можно рассматривать всю плоскость. Напротив, для фигур с дырками нельзя даже просто определить функцию высоты разбиения. В качестве примера рекомендуем читателю рассмотреть квадрат 3×3 с вырезанной центральной клеткой и самостоятельно убедиться, что для этой фигуры не будет выполняться предложение 1.10.

1.6. Восстановление разбиения по знакопередающей матрице. В предыдущих разделах мы научились сопоставлять замощению две знакопередающиеся матрицы, A и B , порядка $n + 1$ и n соответственно. Сейчас мы попробуем ответить на следующий вопрос: насколько точно можно восстановить замощение, зная лишь одну из этих двух матриц (скажем, A)? Для этого мы попробуем что-либо сказать не о самом замощении, а о его функции высоты.

Начнем с некоторого разбиения T . Пусть A — построенная по нему матрица, элементы которой соответствуют *белым* вершинам бриллианта (см. рис. 1.2). Оказывается, что эта матрица определяет функцию высоты в *черных* вершинах.

Предложение 1.18. *По матрице A можно однозначно восстановить функцию высоты в черных вершинах.*

Доказательство. Во-первых, функция высоты на границе ацтекского бриллианта определена однозначно (см. предложение 1.13, (1)). Докажем, что ее можно восстановить во всех внутренних точках.

Рассмотрим какой-нибудь единичный квадратик, у которого левая нижняя вершина белая. На его диагонали, соединяющей белые вершины, можно поставить стрелку так, как мы это делали в доказательстве леммы 1.2: эта стрелка, показанная красным цветом, будет идти из середины доминошки в ее угол. Поэтому два ребра, образующие этот угол, обязательно будут входить в границы доминошек, образующих наше замощение. Возможны два варианта направления красной стрелки; они показаны на рис. 1.11. При



Рис. 1.11. Единичный квадратик

этом в первом случае разность между значениями функции высоты в вершинах w и v будет равняться двум, а во втором — минус двум. Тем самым получается, что функция высоты возрастает на 2 в направлении, показанном зеленой пунктирной стрелкой. Обратите внимание, что в обоих случаях пунктирная зеленая стрелка получается поворотом красной стрелки на девяносто градусов против часовой стрелки.

Поэтому, зная значения функции высоты в граничных черных вершинах, мы можем восстановить функцию высоты во всех черных вершинах бриллианта, например, последовательно продвигаясь из черных вершин его левой верхней границы (значения функции высоты в которых, согласно предложению 1.13 (1), равны $0, 2, 4, \dots$) вправо-вниз. \square

Итак, функция высоты в черных вершинах однозначно определяется по матрице A . Осталось восстановить эту функцию в белых вершинах.

Рассмотрим какую-нибудь белую вершину. Предположим, что соответствующий ей элемент матрицы A равен 1 или 0. Это значит, что в этой вершине сходятся углы двух или четырех доминошек. Возьмем один такой угол; он образован двумя ребрами. Вторые концы этих двух ребер — черные, и функция высоты в них отличается на 2 (скажем, равна $2k$ и $2k + 2$). Значит, значение функции высоты в нашей белой вершине равняется $2k + 1$, и тем самым оно определено однозначно.

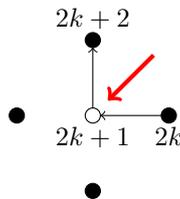


Рис. 1.12. Восстановление функции высоты в угловой белой вершине

Осталось рассмотреть случай, когда значение элемента матрицы A , отвечающего нашей вершине, равно -1 . Это значит, что в этой вершине сходятся середины двух доминошек. Эти доминошки могут быть расположены двумя способами: вертикально или горизонтально. Эти два варианта не отличаются ничем, кроме значения функции высоты в нашей белой вершине: см. рис. 1.13.

Сформулируем итог наших рассуждений в виде следующего предложения.

Предложение 1.19. *Функция высоты замощения восстанавливается по матрице A однозначно во всех вершинах, за исключением белых вершин, отвечающих минус единицам в матрице A .*

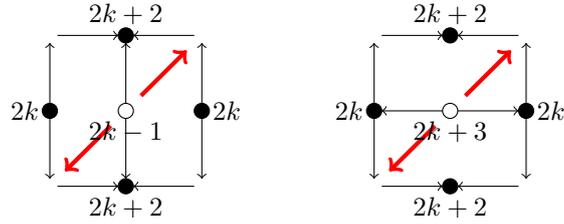


Рис. 1.13. Восстановление функции высоты в неугловой белой вершине

Значение функции высоты в каждой из таких вершин может принимать одно из двух значений, отвечающих двум способам разбить на две доминошки квадрат 2×2 с центром в этой вершине (см. рис. 1.13).

1.7. Все знакопередающиеся матрицы соответствуют замощениям. Во всех наших предыдущих рассуждениях мы исходили из следующего предположения. Мы рассматривали знакопередающую матрицу, которая уже соответствовала некоторому замощению, и пытались восстановить замощение по ней. Сейчас мы докажем, что без последнего предположения можно обойтись, а именно, что каждой знакопередающейся матрице A соответствуют $2^{N_-(A)}$ замощений, где $N_-(A)$ — число минус единиц в этой матрице.

Как мы видели в разделе 1.1, каждая такая знакопередающаяся матрица взаимно-однозначно соответствует конфигурации стрелок, соединяющих белые вершины. Как и прежде, мы будем изображать такие стрелки красным цветом. При этом красные стрелки удовлетворяют условию сбалансированности: в каждую вершину входят и из каждой вершины исходят по две стрелки, а также граничным условиям, описанным в конце раздела 1.1. Наша ближайшая цель — построить функцию в черных вершинах решетки, которая в конечном итоге будет функцией высоты некоторого замощения.

Для этого повернем каждую из красных стрелок на 90° по часовой стрелке. Результат будем изображать зелеными пунктирными стрелками, которые уже будут соединять пары черных вершин. Смысл полученного набора зеленых стрелок в следующем: если исходная матрица A соответствовала какому-то замощению, то разность значений функции высоты в двух соседних (по диагонали) черных вершинах равна ± 2 , причем стрелка будет направлена от меньшего значения к большему. Мы уже видели это в доказательстве предложения 1.18 в случае стрелок, параллельных диагонали, идущей с юго-запада на северо-восток; проверку этого утверждения в оставшемся случае мы оставляем читателю.

Предложение 1.20. *Для определенной таким образом конфигурации зеленых пунктирных стрелок существует функция $H_A(v)$ на множестве черных вершин, для которой разность значений в конце и в начале любой стрелки равна 2, а значение в точке $(-n - 1, 0)$ равно нулю.*

Доказательство. Пусть v — произвольная вершина. Рассмотрим путь, проходящий по зеленым стрелкам и соединяющий вершину $(-n - 1, 0)$ с v . Положим значение $H_A(v)$ равным удвоенной разности между количеством попутных и противоположных стрелок, входящих в этот путь.

Осталось доказать, что значение функции $H_A(v)$ не зависит от выбора пути. Для этого покажем, что любой замкнутый контур с началом и концом в точке $(-n - 1, 0)$ содержит поровну попутных и противоположных стрелок. Ключевое соображение здесь таково: при обходе любого элементарного квадрата с углами в соседних черных вершинах нам встречаются две стрелки, направленные в направлении обхода, и две, направленные в противоположном направлении. Это следует из того, что из четырех красных стрелок, примыкающих к белой вершине в центре этого квадрата, две являются входящими и две исходящими.

После этого любой контур с началом и концом в $(-n - 1, 0)$ можно продеформировать в точку, шаг за шагом отрезая от него единичные квадратики; при этом на каждом шаге разность между количеством попутных и противоположных стрелок, входящих в этот контур, будет оставаться неизменной, а в конце (для точки) она окажется равной нулю. Предложение доказано. \square

Отметим, что в доказательстве этого предложения использовался ровно тот же прием, что и в доказательстве предложения 1.10 о корректности определения функции высоты.

Тем самым по произвольной знакопеременной матрице мы построили некоторую функцию в черных вершинах. Докажем, что теперь ее можно доопределить в белых вершинах таким образом, чтобы она оказалась функцией высоты некоторого замощения, причем количество способов сделать это равняется $2^{N-(A)}$, где A — число минус единиц в матрице A .

Вернемся к конфигурации красных стрелок, которая взаимнооднозначно соответствует матрице A . В каждую из белых вершин входит и выходит по две красные стрелки, которые могут располагаться одним из шести способов, показанных на рис. 1.3. При этом каждому из первых пяти расположений стрелок соответствуют по одной конфигурации, а последнему — две. На рис. 1.14, что в первых пяти случаях значение (гипотетической) функции высоты в центральной белой вершине восстанавливается однозначно, а для шестого расположения красных стрелок существует два варианта

значения функции высоты в центральной вершине. Шестое расположение стрелок отвечает в точности тому, что соответствующий элемент знакопередающей матрицы равен минус единице.

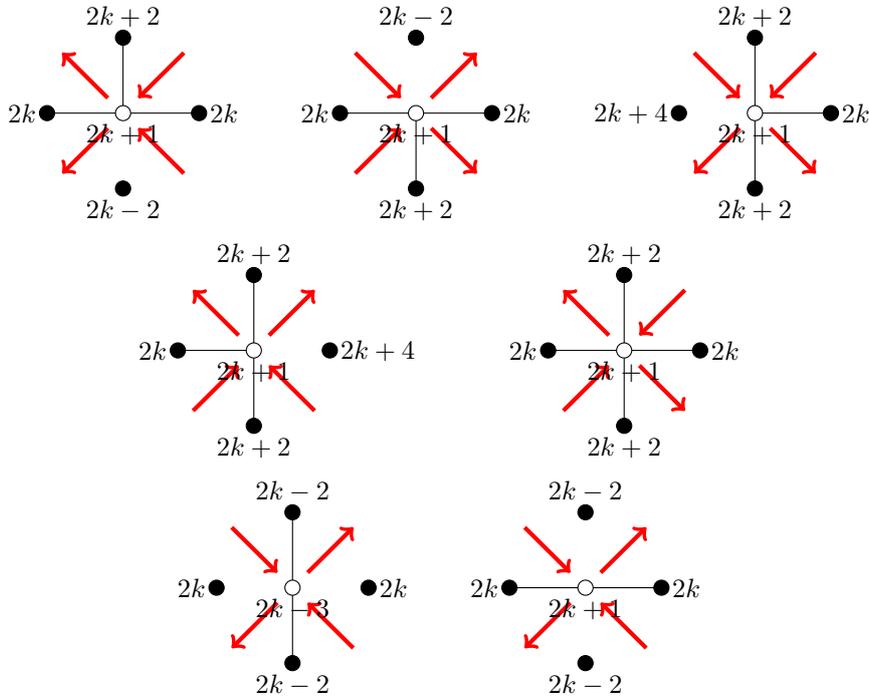


Рис. 1.14. Восстановление функции высоты в центральной вершине

По построению и по теореме 1.16, каждая определенная таким образом в черных и белых вершинах функция будет являться функцией высоты некоторого замощения. Мы получили следующую теорему.

Теорема 1.21. *Для каждой знакопередающей матрицы A , соответствующей белым вершинам замощения, число замощений, отвечающих этой матрице, равно $2^{N_-(A)}$, где $N_-(A)$ — число минус единиц в матрице A .*

То же самое рассуждение можно провести, стартовав с матрицы B и восстанавливая замощение по ней. Напомним только, что определение матрицы B отличалось от определения матрицы A знаком: единицы и минус единицы в матрице B соответствуют черным вершинам, где сходятся соответственно две и четыре доминошки, тогда как для матрицы A дело обстоит наоборот. Приняв это во внимание, получаем «двойственное» утверждение:

Теорема 1.22. *Для каждой знакопередающей матрицы B , соответствующей черным вершинам замощения, число замощений,*

отвечающих этой матрице, равно $2^{N_+(B)}$, где $N_+(B)$ — число единиц в матрице B .

1.8. Завершение доказательства теоремы об ацтекском бриллианте. Обозначим через $AD(n)$ число замощений ацтекского бриллианта размера n . Также обозначим через \mathcal{A}_n множество знакопередающихся матриц порядка n . Из теорем 1.21 и 1.22 вытекают два соотношения, связывающие число замощений ацтекского бриллианта со множеством знакопередающихся матриц.

Следствие 1.23. *Имеют место соотношения*

$$AD(n) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{n+1}} 2^{N_-(A)} \quad \text{и} \quad AD(n) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_+(B)}$$

Доказательство. Мы сопоставили каждому замощению знакопередающейся матрицы $A \in \mathcal{A}_{n+1}$. При этом, согласно теореме 1.21, каждая матрица A соответствует ровно $2^{N_-(A)}$ различным замощениям. Это и утверждает первое равенство. Второе соотношение доказывается аналогично. \square

Теперь еще раз возьмем первое из полученных соотношений и заменим в нем n на $n - 1$, а также переобозначим параметр суммирования: будем обозначать его через B . Мы получим, что

$$AD(n - 1) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_-(B)}.$$

Заметим, что разность числа плюс единиц и минус единиц в знакопередающейся матрице всегда равна порядку матрицы:

$$N_+(B) = n + N_-(B).$$

Тогда из первого соотношения получим, что

$$AD(n) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_+(B)} = 2^n \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 2^{N_-(B)} = 2^n AD(n - 1).$$

А отсюда уже следует теорема об ацтекском бриллианте: поскольку $AD(1) = 2$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} AD(n) &= 2^n AD(n - 1) = 2^n \cdot 2^{n-1} AD(n - 1) = \dots = \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n+(n-1)+\dots+2+1} = 2^{n(n+1)/2}. \end{aligned}$$

Теорема об ацтекском бриллианте доказана.

2. Взгляд второй: совершенные паросочетания на графах

2.1. Совершенные паросочетания и замощения. Пусть Γ — произвольный граф (абстрактный, без каких-либо условий на связность, планарность и т.п.). *Совершенное паросочетание* (по-английски *perfect matching*) — это такой способ разбить все вершины на пары, при котором вершины в каждой паре оказываются соединены ребром. Говоря более формально, совершенное паросочетание — это подмножество $M \subset E(\Gamma)$ ребер графа, обладающее следующим свойством: из каждой вершины графа исходит ровно одно ребро из подмножества M .

Между замощениями фигур с помощью доминошек и совершенными паросочетаниями на графах существует очевидная связь: для произвольной фигуры на клетчатой бумаге можно рассмотреть ее *двойственный граф*. Вершины этого графа будут соответствовать клеточкам; в случае, если две клеточки смежны, вершины будут соединены ребром. Тогда замощение фигуры доминошками есть не что иное, как совершенное паросочетание двойственного графа.

В качестве примера на рис. 2.1 изображено замощение ацтекского бриллианта размера 2 и отвечающее ему совершенное паросочетание на двойственном графе.

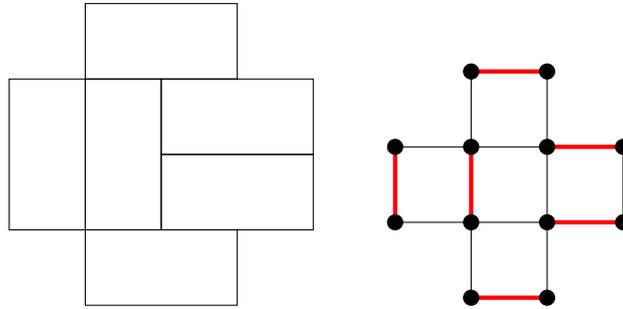


Рис. 2.1. Замощение и паросочетание

Таким образом, число замощений ацтекского бриллианта размера n оказывается равным числу совершенных паросочетаний двойственного к нему графа, который мы будем обозначать через \mathcal{AD}_n (на рис. 2.2 в качестве примера изображен граф \mathcal{AD}_3).

2.2. Взвешенные суммы. Предположим, что граф Γ является *взвешенным*: на каждом его ребре $e \in E(\Gamma)$ написан его *вес*, т.е. некоторое выражение $\text{wt } e$ (число или многочлен от каких-либо переменных). *Весом* совершенного паросочетания M будем называть произведение весов всех входящих в него ребер:

$$\text{wt } M = \prod_{e_i \in M} \text{wt } e_i.$$

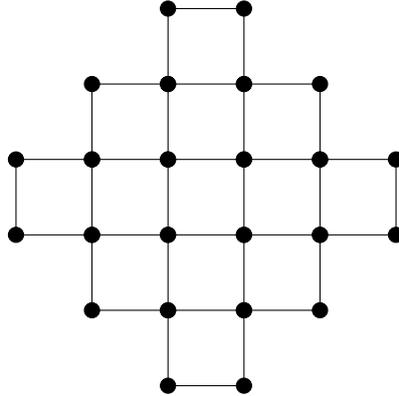


Рис. 2.2. Граф, отвечающий ацтекскому бриллианту размера 3

Следующее определение для нас будет являться ключевым. Для данного графа Γ определим его *статистическую сумму* (или, короче, *статсумму*) $Z(\Gamma)$ как сумму весов его всевозможных совершенных паросочетаний:

$$Z(\Gamma) = \sum_M \text{wt } M.$$

Пример 2.1. Пусть Γ — квадрат, на ребрах которого расставлены веса x , y , z и w , как показано на рис. 2.3. Тогда для Γ имеются ровно два совершенных паросочетания, образованные парами противоположных сторон квадрата, и статистическая сумма графа Γ равняется

$$Z(\Gamma) = xz + yw.$$

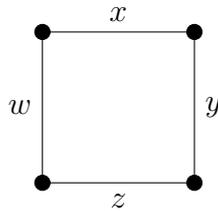


Рис. 2.3. Статсумма этого графа равна $xz + yw$

Ясно, что если все веса на ребрах графа Γ равны единице, то $Z(\Gamma)$ равняется числу совершенных паросочетаний. Поэтому наша цель — найти статистическую сумму $Z(\mathcal{AD}_n)$ для ацтекского бриллианта \mathcal{AD}_n , все веса на ребрах которого равны единице. Мы сделаем это, сведя вычисление этой функции к вычислению $Z(\mathcal{AD}_{n-1})$

при помощи различных манипуляций с исходным графом, при которых статсумма будет меняться контролируемым образом. Для этого нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

2.3. Лемма о расширении площадей. Предположим, что в графе Γ имеется подграф из восьми вершин, изображенный на рисунке. При этом требуется, чтобы ни одна из вершин внутреннего квадрата (обозначим их через A' , B' , C' и D') не была бы соединена более ни с какими вершинами; напротив, четыре внешние вершины A , B , C и D могут быть соединены с какими-либо из вершин, не входящих в указанный фрагмент. Также предположим, что между этими восемью вершинами нет никаких других ребер, кроме тех двенадцати, которые изображены на рисунке. Кроме того, пусть веса на ребрах расставлены так, как указано на рисунке: ребра, соединяющие «внешние» и «внутренние» вершины, имеют вес 1, а веса на ребрах внутреннего квадрата произвольны (обозначим их через x , y , z и w).

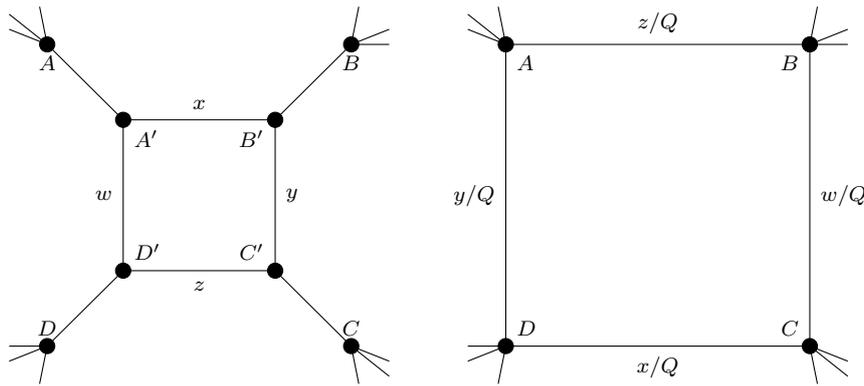


Рис. 2.4. Лемма о расширении площадей

Произведем с графом Γ следующие преобразования: заменим в нем этот фрагмент на квадрат $ABCD$. При этом мы считаем, что все ребра соединяющие «внешние» вершины с вершинами, не входящими в этот фрагмент, остаются без изменений. Расставим веса на ребрах этого квадрата так, как показано на рис. 2.4 справа: поменяем местами веса на противоположных ребрах и поделим все веса на величину $Q = xz + yw$. Получившийся граф обозначим через Γ' . Следующая лемма утверждает, что статсумма этого графа отличается от $Z(\Gamma)$ в Q раз.

Лемма 2.2 (о расширении площадей). *Имеет место равенство $Z(\Gamma') = Z(\Gamma)/Q$.*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо совершенное паросочетание M в графе Γ . Посмотрим, каким ребрам из этого паросочетания принадлежат вершины A , B , C и D . Для каждой из этих вершин

реализуется одна из двух ситуаций: она может быть соединена либо с одной из «наружных» вершин, либо с одноименной «внутренней» (штрихованной) вершиной. Итого а priori получается $2^4 = 16$ вариантов; однако из них реализуются не все, а лишь шесть. Действительно, легко заметить, что количество вершин, соединенных «наружу», обязательно должно быть четно — то есть таких вершин либо четыре, либо ни одной (это два варианта), либо две. Кроме того, если их две, то эти вершины обязательно должны быть соседними. Рассмотрим все эти ситуации по отдельности.

а) Пусть две вершины (без ограничения общности считаем, что это A и B) соединены с наружными вершинами, а C и D , напротив, соединены соответственно с C' и D' . Это значит, что между вершинами A' и B' также имеется ребро. Итак, вес паросочетания M равен

$$\text{wt } M = x \cdot \text{wt } M^{\text{out}},$$

где M^{out} — произведение весов всех «внешних» ребер, т.е. ребер, не входящих в рассматриваемый фрагмент.

Сопоставим паросочетанию M совершенное паросочетание M' в графе Γ' , построенное следующим образом: вместо ребер $A'B'$, CC' и DD' в него будет входить ребро CD ; остальные ребра останутся без изменений. (Заметим, что при этом действительно получится паросочетание — из каждой вершины будет исходить ровно одно ребро). Вес паросочетания M' будет равен

$$\text{wt } M' = \text{wt}(CD) \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = (x/Q) \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = \text{wt } M/Q.$$

Получаем, что паросочетанию M в старом графе сопоставлено паросочетание M' в новом графе, вес которого в Q раз меньше.

б) Пусть паросочетание M таково, что все вершины A, B, C, D соединены с одноименными штрихованными вершинами. Веса ребер AA' , BB' , CC' и DD' равны единице, так что вес паросочетания M равен произведению весов всех ребер за пределами рассматриваемого нами участка графа: $\text{wt } M = \text{wt } M^{\text{out}}$. Сопоставить такому паросочетанию *одно* паросочетание подходящего веса в графе Γ' , как это было сделано в предыдущем случае, уже не получится — однако ему можно сопоставить два совершенных паросочетания. Пусть M' получается из M заменой четырех «диагональных» ребер на ребра AB и CD . Вес такого паросочетания равен

$$\text{wt } M' = z/Q \cdot x/Q \cdot \text{wt } M^{\text{out}} = (xz/Q^2) \cdot M.$$

Рассмотрим теперь совершенное паросочетание M'' , в котором вместо ребер AB и CD взята пара других противоположных ребер: AD и BC . Получим, что

$$\text{wt } M'' = (yw/Q^2) \cdot \text{wt } M.$$

Таким образом, мы сопоставили совершенному паросочетанию M два совершенных паросочетания M' и M'' , суммарный вес которых

равен

$$\text{wt } M' + \text{wt } M'' = (xz + yw)/Q^2 \cdot \text{wt } M = \text{wt } M/Q.$$

То есть их суммарный вес опять-таки в Q раз меньше, чем вес M .

в) Наконец, последний случай: пусть все вершины A, B, C, D соединены с внешними вершинами. Тогда совершенное паросочетание M в интересующем нас фрагменте может быть устроено одним из двух способов: в него могут либо входить ребра $A'B'$ и $C'D'$ (назовем это паросочетание M_1), либо $A'D'$ и $B'C'$ (назовем его M_2). Этим двум паросочетаниям мы сопоставим *одно* совершенное паросочетание M' в графе Γ' ; оно будет устроено единственно возможным способом, т.е. в него не будут входить ребра из квадрата $ABCD$. Аналогично предыдущим случаям получаем, что

$$\text{wt } M_1 + \text{wt } M_2 = (xz + yw) \cdot \text{wt } M^{out} = Q \cdot \text{wt } M^{out} = Q \cdot \text{wt } M'.$$

Итак, мы разбили всевозможные совершенные паросочетания в графе Γ на наборы из одного или двух элементов и для каждого набора нашли другой набор совершенные паросочетаний в графе Γ' (также из одного или двух элементов), обладающий следующим свойством: суммарный вес второго набора в $Q = xz + yw$ раз меньше, чем суммарный вес первого набора. Несложно доказать следующее утверждение, которое мы оставим читателю: в результате этого соответствия получаются все совершенные паросочетания графа Γ' , причем ровно по одному разу (т.е. каждое паросочетание графа Γ' получается ровно из одного одноэлементного или двухэлементного набора паросочетаний графа Γ).

Упражнение 2.3. Докажите это утверждение.

Это упражнение завершает доказательство требуемого равенства:

$$Z(\Gamma') = Z(\Gamma)/(xz + yw).$$

□

2.4. Подсчет числа совершенных паросочетаний ацтекского бриллианта. В этом разделе мы, как и было обещано, вычислим $Z(\mathcal{AD}_n)$, где \mathcal{AD}_n — граф, отвечающий ацтекскому бриллианту порядка n , все веса на ребрах которого равны единице.

Сделаем с графом \mathcal{AD}_n следующее преобразование: заменим каждую его вершину на три вершины, соединенные между собой двумя ребрами, как это показано на рис. 2.5. В результате получим «утроенный» граф \mathcal{AD}_n^3 .

Оказывается, «утроение» вершин никак не влияет на статсумму графа:

Предложение 2.4. *Статсуммы исходного и утроенного графа равны: $Z(\mathcal{AD}_n) = Z(\mathcal{AD}_n^3)$.*

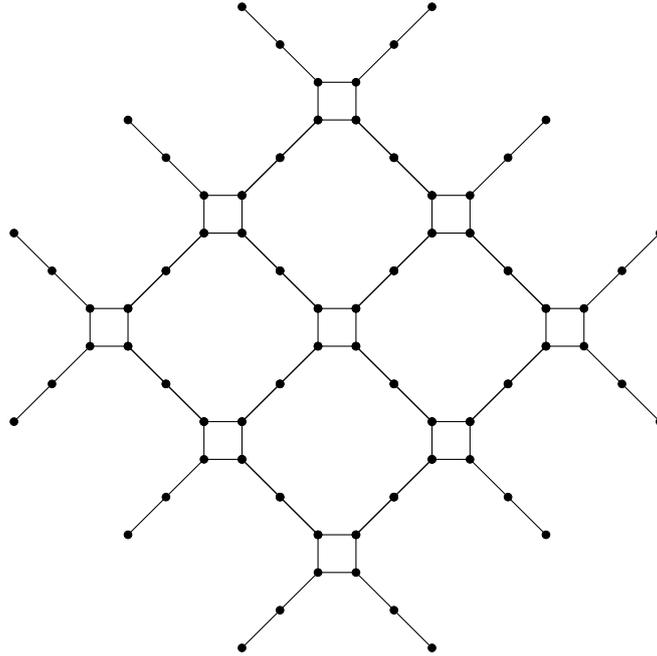


Рис. 2.5. Ацтекский бриллиант с утроенными вершинами

Упражнение 2.5. Докажите это предложение, построив биекцию между множествами совершенных паросочетаний этих графов.

Теперь настало время применить к «утроенному» графу лемму о расширении площадей. А именно, мы применим ее к каждому из n^2 маленьких квадратиков, из вершин которого выходят четыре диагональных ребра. Граф, полученный в результате, показан на рис. 2.6; обратите внимание, что все его ребра, кроме диагональных «усов», уже будут иметь вес $1/2$ (такие ребра отмечены на рисунке пунктиром; сплошные ребра, как обычно, имеют вес 1).

Обозначим этот граф $\widetilde{\mathcal{AD}}_n$. Лемма о расширении площадей позволяет найти его статсумму. Действительно, каждое применение леммы уменьшает статсумму вдвое, а всего мы ее применили n^2 раз. Значит,

$$Z(\widetilde{\mathcal{AD}}_n) = Z(\mathcal{AD}_n)/2^{n^2}. \quad (*)$$

Что можно сказать о совершенных паросочетаниях графа $\widetilde{\mathcal{AD}}_n$? Ясно, что в каждое паросочетание будут входить все $4n$ «усов» — т.е. ребер веса 1. На значение статсуммы они не влияют. Поэтому все эти ребра и смежные с ними вершины можно просто удалить — и статсумма оставшегося графа будет равна $Z(\widetilde{\mathcal{AD}}_n)$. Но граф, который останется при этом, будет ацтекским бриллиантом на единицу меньшего размера, все ребра которого будут иметь вес $1/2$.

Мы почти у цели: выясним, чему равна статсумма ацтекского бриллианта \mathcal{AD}_{n-1} , все ребра в котором имеют вес $1/2$. Она меньше

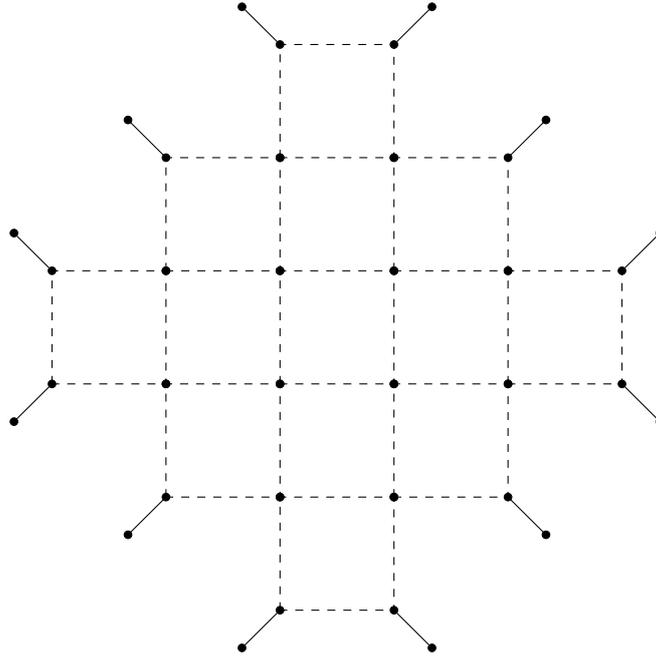


Рис. 2.6. Утроенный азтекский бриллиант после преобразования

$Z(\mathcal{AD}_{n-1})$ в 2^N раз, где N — число ребер в совершенном паросочетании, т.е. половина числа вершин графа. А в азтекском бриллианте размера $n - 1$ всего $2n(n - 1)$ вершин — стало быть, интересующая нас сумма равна $Z(\mathcal{AD}_{n-1})/2^{n(n-1)}$. Но это, как мы выяснили раньше, и есть статсумма графа $\widetilde{\mathcal{AD}}_n$ с рис. 2.6! Мы получили еще одно выражение для этой суммы:

$$Z(\widetilde{\mathcal{AD}}_n) = Z(\mathcal{AD}_{n-1})/2^{n(n-1)}.$$

Сравнив полученное с равенством (*), мы получаем, что

$$Z(\mathcal{AD}_n) = \frac{2^{n^2}}{2^{n(n-1)}} \cdot Z(\mathcal{AD}_{n-1}) = 2^n Z(\mathcal{AD}_{n-1}).$$

Таким образом, число замощений азтекского бриллианта размера n в 2^n раз больше числа замощений бриллианта размера $n - 1$. А отсюда и из равенства $Z(\mathcal{AD}_1) = 2$ получается второе доказательство теоремы об азтекском бриллианте.

3. Взгляд ТРЕТИЙ: ЧИСЛА ШРЕДЕРА И НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПУТИ

3.1. Числа Шредера. Пусть n — целое неотрицательное число. Рассмотрим ломаные (пути) на координатной плоскости из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, составленные из векторов $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(2, 0)$ и лежащие (не строго) выше оси абсцисс. Такие пути называются *путями Шредера*, а их число — соответственно, n -м *числом Шредера*; мы будем обозначать его через r_n .

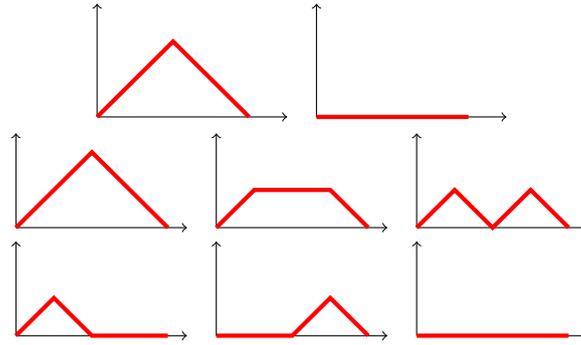


Рис. 3.1. Пути Шредера для $n = 1$ и $n = 2$.

Пример 3.1. На рис. 3.1 изображены все пути Шредера для $n = 1$ и 2 : их оказывается два и шесть соответственно.

Замечание 3.2. Возможно, читателю известны *пути Дика*: это пути Шредера без горизонтальных звеньев. Число путей Дика длины $2n$ — это n -е *число Каталана*. Последовательность чисел Каталана — $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ — играет очень важную роль во многих комбинаторных задачах и имеет множество разных интерпретаций; так, Ричард Стенли в книге [7] и приложении к ней [18] приводит более двух сотен комбинаторных описаний этой последовательности! В той же книге можно найти и массу интересного о числах Шредера.

Замечание 3.3. Пути Шредера можно рассматривать как пути не на целочисленной решетке, а на вдвое более редкой ее подрешетке: если взять сумму абсциссы и ординаты любого звена, входящего в путь Шредера, все эти суммы будут иметь одинаковую четность (в частности, они будут четны, если путь Шредера исходит из начала координат). Это соображение совершенно элементарно, но в дальнейшем оно нам еще неоднократно пригодится.

Будем называть путь Шредера *малым*, если он пересекается с осью абсцисс лишь в конечном числе точек (иначе говоря, у него нет горизонтальных звеньев, проходящих на высоте 0). Число малых путей Шредера из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ будем обозначать через s_n ; это число называется n -м *малым числом Шредера*.

Упражнение 3.4. Нарисуйте все малые пути Шредера из точки $(0, 0)$ в точку $(6, 0)$ (их должно получиться 11).

Из примера 3.1 видно, что при $n = 1$ один из путей будет малым, а другой — нет; при $n = 2$ малых путей будет три из шести. В обоих случаях число малых путей Шредера составляет ровно половину от общего числа путей. Оказывается, это не совпадение.

Предложение 3.5. При $n > 0$ число малых путей Шредера вдвое меньше общего числа путей Шредера: $r_n = 2s_n$.

Доказательство. Мы докажем это, построив биекцию на множестве путей Шредера: каждому пути, не являющемуся малым, мы сопоставим малый путь Шредера, причем это соответствие окажется взаимно-однозначным. Тем самым будет доказано, что тех и других путей поровну.

Рассмотрим путь, не являющийся малым. В нем есть горизонтальные звенья, проходящие на нулевой высоте. Возьмем самое правое из таких звеньев; пусть оно соединяет точки $(2k, 0)$ и $(2k + 2, 0)$ (его абсциссы будут четны в силу замечания 3.3). Удалим это звено и сделаем с тем, что осталось, следующее преобразование. Все, что справа от этого звена, оставим без изменений; тот же отрезок пути, который располагался слева от удаленного звена, сместим на вектор $(1, 1)$, то есть на единицу вправо и вверх. Мы получим путь из точки $(1, 1)$ в точку $(2k + 1, 1)$. Добавим к нему «ножки» — два наклонных звена $(0, 0) - (1, 1)$ и $(2k + 1, 1) - (2k + 2, 0)$ (см. рис. 3.2). Полученный путь «склеится» с правой половиной исходного пути.

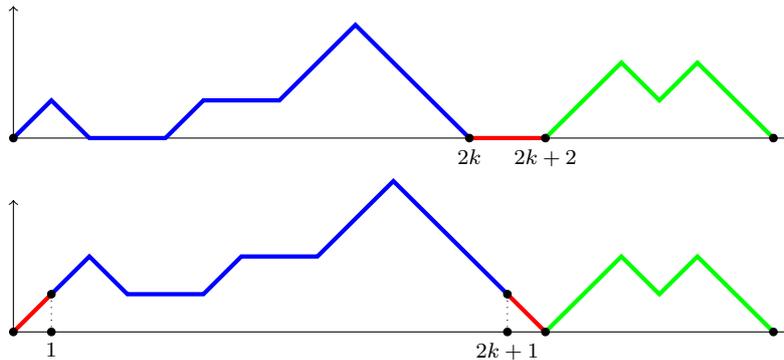


Рис. 3.2. Биекция на множестве путей Шредера

В итоге получится новый путь Шредера, который уже будет малым: действительно, если в исходном пути были другие горизонтальные звенья, они все были слева от того звена, которое мы удалили — то есть после нашего преобразования они поднялись на высоту 1. Тем самым из пути Шредера, не являющегося малым, мы изготовили малый путь Шредера.

Упражнение 3.6. Докажите, что полученное отображение действительно является биекцией (это легче всего сделать, описав обратное к нему отображение).

□

3.2. Наборы непересекающихся путей Шредера. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим наборы из n путей (π_1, \dots, π_n) , удовлетворяющих следующим условиям:

(1) π_i — путь Шредера, соединяющий точки оси абсцисс с координатами $-(2i - 1)$ и $2i - 1$ (т.е. путь π_1 идет из -1 в 1 , путь π_2 — из -3 в 3 , и так далее).

(2) Никакие два пути π_i и π_j не пересекаются (т.е. не имеют общих точек).

Пример такого набора путей изображен на рис. 3.3

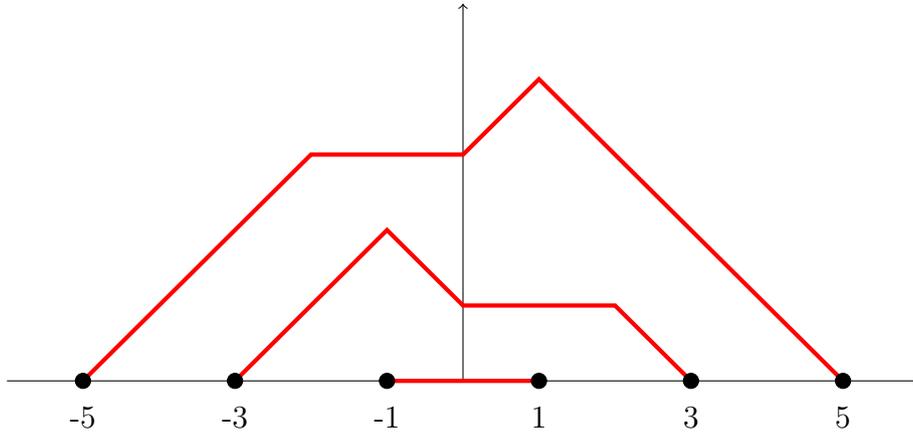


Рис. 3.3. Набор путей Шредера

Пусть H_n — количество таких наборов. Далее, через G_n обозначим количество таких наборов, в которых все пути π_1, \dots, π_n являются малыми.

Наша дальнейшая цель — вычислить H_n и G_n .

Упражнение 3.7. Убедитесь, что $H_1 = G_2 = 2$, а $H_2 = G_3 = 8$ (нарисуйте все такие наборы путей).

Читатель, проделавший это упражнение, без труда докажет и общее утверждение:

Предложение 3.8. *Имеет место равенство $H_n = G_{n+1}$.*

Доказательство. Построим биекцию: набору из n непересекающихся путей Шредера с концами в точках $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n - 1)$ сопоставим набор из $n + 1$ *малого* пути Шредера с концами в точках $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n + 1)$. Сделаем это следующим образом: сдвинем весь набор путей на 2 единицы вверх и дорисуем к каждому

из путей диагональные «ножки», как показано на рис. 3.4. Получим набор путей, соединяющих между собой точки с абсциссами $\pm 3, \pm 5, \dots, \pm(2n + 1)$. Ясно, что все получившиеся таким образом пути будут малыми. Осталось только дорисовать единственный возможный малый путь из -1 в 1 . Биективность построенного отображения очевидна.

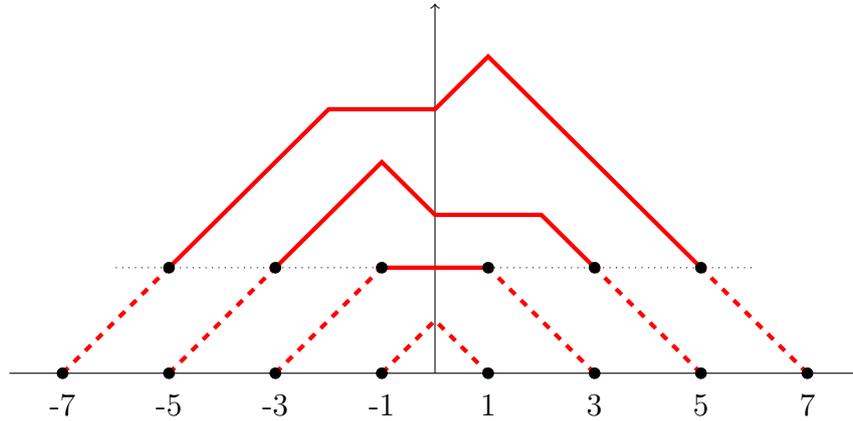


Рис. 3.4. Набор малых путей Шредера

□

Следующее соотношение доказывается несколько сложнее, однако при его доказательстве используется замечательный прием — метод непересекающихся путей Линдстрема–Гесселя–Вьенно.

Теорема 3.9. *Имеет место равенство $H_n = 2^n G_n$.*

Доказательство. Имеет место следующее утверждение, которое мы докажем чуть позже.

Лемма 3.10. *Числа H_n и G_n представляются в виде определителей матриц, элементами которых являются числа Шредера и малые числа Шредера соответственно:*

$$H_n = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n-1} \end{vmatrix}; \quad G_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Из этой леммы немедленно следует утверждение теоремы: действительно, поскольку каждый элемент первой матрицы — число Шредера — вдвое больше соответствующего элемента второй матрицы, т.е. малого числа Шредера с тем же номером, определители этих матриц отличаются в 2^n раз, где n — порядок матрицы. □

С учетом того, что $H_1 = 2$ и $G_1 = 1$, отсюда легко найти общую формулу для этих чисел:

Следствие 3.11. $H_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$; $G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать лемму 3.10.

Доказательство леммы 3.10. Докажем сначала первое равенство. Для этого представим определитель в правой части как сумму по перестановкам:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_2 & r_3 & \dots & r_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n+1} & \dots & r_{2n-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \dots r_{n-1+\sigma(n)}.$$

Проинтерпретируем каждое из слагаемых в терминах путей Шредера. А именно, $r_{\sigma(1)}$ — это количество путей Шредера, соединяющих точку -1 с точкой $2\sigma(1) - 1$; $r_{1+\sigma(2)}$ — число путей между точкой -3 и точкой $2\sigma(2) - 1$, \dots , $r_{k-1+\sigma(k)}$ — число путей, соединяющих точку $-(2k - 1)$ (иначе говоря, k -ю по счету точку с нечетной отрицательной абсциссой, если считать от нуля влево) с точкой $2\sigma(k) - 1$ (т.е. с $\sigma(k)$ -й точкой с нечетной абсциссой, если считать от нуля вправо). Таким образом, $r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \dots r_{n-1+\sigma(n)}$ есть число наборов из n путей Шредера, в которых k -я «отрицательная» точка соединена путем с $\sigma(k)$ -й «положительной» точкой. Будем говорить, что такой набор путей *отвечает перестановке* σ . Отметим, что мы не налагаем никаких дополнительных условий на взаимное расположение этих путей: они могут пересекаться (более того, если $\sigma \neq id$, пересечения обязательно будут), у них могут быть совпадающие участки и т.д.

Далее, рассмотрим множество всех наборов *пересекающихся* путей Шредера, отвечающих всевозможным перестановкам. Определим на этом множестве инволюцию ι (т.е. отображение в себя, квадрат которого равен тождественному). Пусть дан некоторый набор путей, среди которых есть пересекающиеся. Пусть k — наименьший номер пути, который пересекается с каким-то другим путем (мы говорим, что путь имеет номер k , если он исходит из точки $-(2k - 1)$). При этом k -й путь может пересекаться с несколькими путями; рассмотрим среди них тот, для которого точка пересечения с k -тым путем расположена левее всего; если же таких путей несколько, выберем среди них путь с наименьшим номером. Обозначим этот номер через ℓ .

Теперь сопоставим нашему набору путей новый набор по следующему правилу. Возьмем самую левую точку пересечения k -го и ℓ -го путей и поменяем после нее пути местами: в качестве нового k -го пути возьмем путь, совпадающий с k -м левее точки пересечения и с ℓ -м правее ее; наоборот, в качестве нового ℓ -го пути возьмем начальный (левый) участок старого ℓ -го пути и конечный (правый)

участок k -го, как показано на рис. 3.5. Мы получили новый набор путей, отвечающий другой перестановке. Во-первых, легко видеть, что оба пути, получившиеся в результате перестановки, снова будут путями Шредера. Во-вторых, если исходный путь отвечал перестановке σ , то новый путь будет отвечать перестановке $\sigma' = \sigma \cdot (kl)$. В частности, перестановки σ и σ' будут иметь различную четность, т.к. они получаются друг из друга умножением на транспозицию.

Так, например, на рис. 3.5 слева изображен набор путей, отвечающий перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; инволюция, примененная к нему, меняет участки красного и синего путей справа от отмеченной точки. Полученный в результате набор путей изображен на том же рисунке справа; он уже отвечает перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

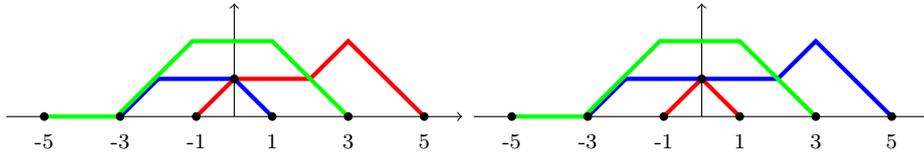


Рис. 3.5. Инволюция на множестве наборов пересекающихся путей

Несложно видеть, что построенное таким образом отображение будет инволюцией: если применить его к новому набору путей еще раз, получится исходный набор (это обусловлено нашим выбором той точки, после которой мы меняем два отрезка путей местами).

Проделав это, еще раз посмотрим на выражение $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma r_{\sigma(1)} r_{1+\sigma(2)} \cdots r_{n-1+\sigma(n)}$. Как уже было сказано, оно равно сумме числа наборов путей, отвечающих всевозможным перестановкам, причем четные перестановки учитываются в этой сумме со знаком «плюс», а нечетные — со знаком «минус». Однако построенная выше инволюция показывает, что общий вклад наборов *пересекающихся* путей в эту сумму равен нулю: действительно, к каждому набору пересекающихся путей есть парный (получаемый из него инволюцией), который учитывается с противоположным знаком. Отсюда следует, что эта сумма равна числу наборов *непересекающихся* путей. При этом важно отметить, что все наборы непересекающихся путей отвечают тождественной перестановке, а значит, входят со знаком «плюс». Число таких путей равно H_n , откуда и следует первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично. \square

Замечание 3.12. Использованный нами метод подсчета определителя при помощи непересекающихся путей (также обычно называемый *методом Линдстрема–Гесселя–Вьенно*) допускает многочисленные обобщения и оказывается весьма полезным во многих

других комбинаторных задачах. О некоторых из них можно прочитать, например, в статье [1] или в брошюре [6].

Замечание 3.13. Матрица, определитель которой был вычислен в предыдущей лемме, представляет собой частный случай так называемой *матрицы Ганкеля*: так называются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{pmatrix},$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1})$ — некоторая числовая последовательность.

Упражнение 3.14. Вычислите определитель матрицы Ганкеля, построенной по последовательности чисел Каталана $C_1, C_2, \dots, C_{2n-1}$.

3.3. Наборы путей и замощения ацтекского бриллианта. Мы доказали, что количество наборов из n непересекающихся путей Шредера длины $2, 6, 10, \dots, 4n - 2$ равняется $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ — то есть числу, которое появляется в теореме об ацтекском бриллианте. Докажем, что такие наборы биективно соответствуют замощениям.

Рассмотрим некоторое замощение ацтекского бриллианта и построим по нему набор путей. После этого нарисуем на некоторых доминошках отрезки согласно следующему правилу. Возьмем левую нижнюю четверть бриллианта и отметим на вертикальных отрезках ее границы середины сторон. Далее возьмем те доминошки, которые содержат отмеченные точки, и нарисуем на каждой из них центрально-симметричный отрезок. Эти отрезки могут быть либо горизонтальными, если соответствующая доминошка расположена горизонтально, либо диагональными, если доминошка лежит вертикально. Вторые концы нарисованных отрезков выйдут на границу с другими доминошками; тем самым на границе других доминошек появятся отмеченные точки. Сделаем с ними то же самое: нарисуем на каждой из таких доминошек горизонтальный или диагональный отрезок. Будем продолжать этот процесс, пока это возможно; в результате получим набор из n путей, соответствующий замощению. Пример замощения и соответствующего набора путей показан на рисунке 3.6.

По построению, эти пути не будут пересекаться; при этом каждый из путей будет соединять середину вертикального отрезка на левой границе бриллианта с точкой, зеркально-симметричной ей относительно вертикальной оси (почему?). Далее, из этого набора можно изготовить набор n путей Шредера, причем единственным образом — для этого всего лишь нужно продолжить эти пути до пересечения с осью абсцисс, как показано на рисунке 3.6 (продолжения путей обозначены пунктиром).

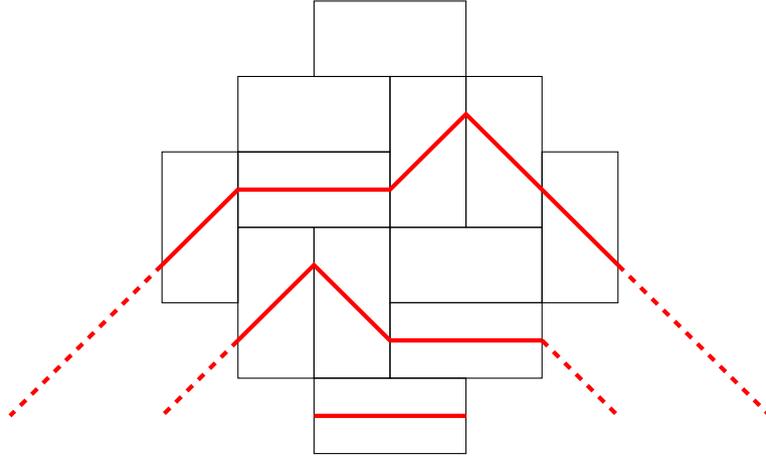


Рис. 3.6. Построение набора путей по замощению

Тем самым из каждого замощения изготавливается набор непересекающихся путей Шредера, причем разным замощениям, очевидно, соответствуют разные наборы. Это соответствие можно обратить: по набору путей можно построить замощение, нарисовав вокруг каждого горизонтального или диагонального участка пути горизонтальную или вертикальную доминошку соответственно; положение оставшихся доминошек тогда может быть восстановлено однозначно — они все будут горизонтальными (предлагаем читателю убедиться в этом самому). Значит, число замощений алтекского бриллианта размера n равно H_n , то есть $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Это завершает третье доказательство теоремы об алтекском бриллианте.

3.4. Числа Деланнуа и «утолщенный бриллиант». Соответствие между замощениями и наборами путей, которое мы использовали, оказывается применимо и в других подобных ситуациях. Вот еще одна задача о замощениях, в которой возникает красивый комбинаторный ответ. Ее мы оставляем читателю.

Определение 3.15. n -м *центральным числом Деланнуа* называется число путей на координатной плоскости из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из звеньев вида $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(2, 0)$. (В отличие от путей Шредера, этим путям разрешается заходить ниже оси абсцисс.)

Иначе говоря, n -е число Деланнуа — это число способов провести шахматного короля из левого нижнего в правый верхний угол на доске размера $(n + 1) \times (n + 1)$.

Упражнение 3.16. Рассмотрим алтекский бриллиант, к которому добавили еще одну строку максимальной длины (см. рис. 3.7). Докажите, что число замощений этой фигуры будет равно n -му числу Деланнуа.

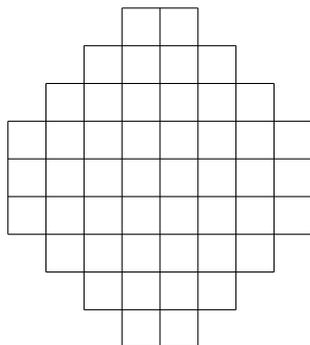


Рис. 3.7. Бриллиант с дополнительной средней строкой

Указание. Сопоставьте замощению утолщенного бриллианта путь, построенный аналогично тому, как это делалось для обычного бриллианта. Докажите, что такой путь, во-первых, является путем Деланнуа, а во-вторых, полностью определяет замощение.

Упражнение 3.17 (почти что задача-шутка). А что будет, если строку в середине не добавить, а, наоборот, удалить? (Такая фигура называется *фальшивым бриллиантом*).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. А ЧТО ЕЩЕ БЫВАЕТ?

Мы рассмотрели три различных доказательства теоремы об ацтекском бриллианте. Однако возможные способы доказать эту теорему не исчерпываются этими тремя. Так, даже в самой первой статье, где шла речь об ацтекском бриллианте — в работе Элкиса, Куперберга, Ларсена и Проппа [9] и [10]³ — было приведено целых четыре доказательства, которые используют идеи из самых разных разделов математики, вплоть до теории представлений. Из этих четырех доказательств мы разобрали только одно, первое.

У теоремы об ацтекском бриллианте есть еще несколько доказательств, оставшихся за рамками нашей брошюры. Из них упомянем доказательство, полученное независимо И. И. Богдановым (оно изложено в статье К. П. Кохася [5]) и Эриком Ко [15]. Оно основано на методе *конденсации Доджсона*⁴. Метод конденсации впоследствии был обобщен Дэвидом Спаером [17] на более общие графы, что, в частности, привело к доказательству некоторых гипотез из теории кластерных алгебр.

В заключение мы упомянем несколько других задач (или даже направлений исследований), родственных задачам о замощениях доминошками. Некоторые из них оказывается возможным решить при помощи тех же методов, которые мы использовали при изучении ацтекского бриллианта.

4.1. Треугольная решетка. Мы рассматривали замощения доминошками фигур, нарисованных на квадратной решетке. Другая вариация этого сюжета состоит в том, чтобы вместо листа «в клетку» рассмотреть лист «в треугольник», т.е. плоскость, разбитую на равные правильные треугольники. Аналогом доминошки при этом будет ромб, склеенный из двух треугольников по стороне. В случае квадратной решетки у доминошки было два возможных положения — вертикальное и горизонтальное; доминошку-ромб можно расположить уже тремя различными способами. Вопрос, который можно себе задать, тот же: сколькими способами данную фигуру на треугольной решетке можно замостить ромбами? Например, что будет получаться, если эта фигура — правильный шестиугольник со стороной n ?

На рис. 4.1 изображен пример замощения такого шестиугольника. Однако если применить пространственное воображение, ту же самую картинку можно трактовать и иначе: можно считать, что

³Эта работа была разбита на две части и опубликована в двух последовательных выпусках журнала ввиду своего значительного объема.

⁴Английский математик Ч. Л. Доджсон также известен под своим литературным псевдонимом — Льюис Кэрролл.

это не замощение плоскости ромбами, а пространственная фигура, сложенная из единичных кубиков! Кубики при этом заполняют часть координатного октанта, т.е. «угла комнаты». Такие пространственные фигуры называются *трехмерными диаграммами Юнга*; они тоже очень часто возникают в различных математических задачах.

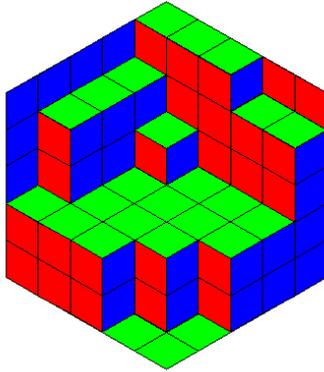


Рис. 4.1. Замощение ромбиками треугольной решетки

Интерпретация картинки с замощением как пространственной оказывается очень полезной: так, например, если определить для замощения ромбическими доминошками функцию высоты, как мы это делали в первой лекции, то ее значение будет равняться настоящей высоте, т.е. расстоянию от вершины соответствующего кубика до плоскости $x + y + z = 0$, умноженному на $\sqrt{3}$.

Количество замощений шестиугольника со сторонами ℓ , m и n (иначе говоря, количество трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда) может быть найдено по *формуле Макмагона*:

$$Y_{3D}(\ell, m, n) = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}.$$

Подробнее о формуле Макмагона и различных ее обобщениях можно прочесть, например, в брошюре [6].

4.2. Асимптотические задачи. Еще одна серия вопросов, возникающих в связи с замощениями, звучит так: как выглядит «типичное» замощение той или иной фигуры? Скажем, что можно сказать про взятое наугад замощение ацтекского бриллианта размера n ?

Сказать о нем, как выясняется, можно довольно многое. А именно, если n достаточно большое, то с вероятностью, близкой к 1, у взятого наугад замощения окажутся «замороженные углы». Более точно, рассмотрим окружность, вписанную в квадрат, ограничивающий ацтекский бриллиант. Она отрезает от квадрата четыре угла.

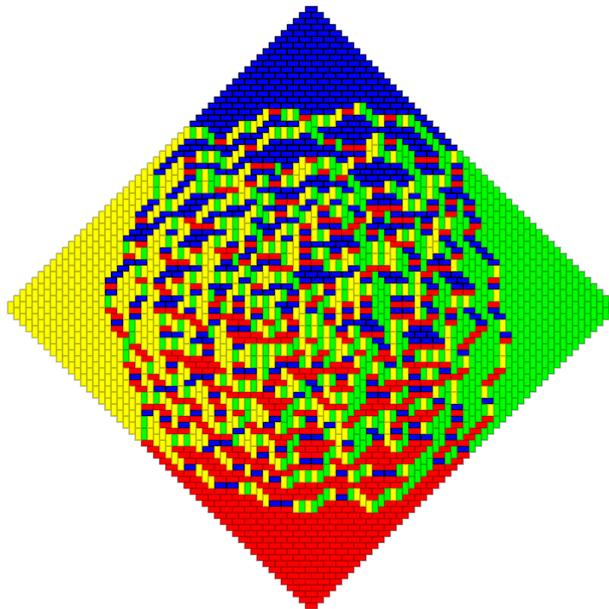


Рис. 4.2. Случайное замощение и полярный круг

Оказывается, что у типичного замощения все доминошки, попадающие в эти углы, т.е. вне этой окружности, будут «заморожены»: в нижнем и верхнем углу они все будут горизонтальными, а в левом и правом — вертикальными. Напротив, поведение замощения внутри этой окружности предсказать нельзя — оно является хаотичным. Это составляет утверждение *теоремы о полярном круге*, доказанной в 1995 году У. Джокушем, Дж. Проппом и П. Шором [13]: при стремлении размера бриллианта к бесконечности граница «замороженной области» стремится ко вписанной в границу бриллианта окружности (она достаточно хорошо видна на рис. 4.2, на котором изображено «случайное» замощение ацтекского бриллианта размера 50).

Аналогичными вопросами можно задаваться и для шестиугольников на треугольной решетке, тем самым выясняя, как ведет себя типичная трехмерная диаграмма Юнга. Однако это уже остается за пределами нашего рассказа. Тем, кто хочет узнать об этом больше, рекомендуем начать с популярных статей В. Е. Горина [2] и Р. Кеньона и А. Ю. Окунькова [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон. Метод отражений // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 18. С. 112–141.
- [2] В. Е. Горин. Что можно сложить из кубиков? // Квант, 4, 2012, 6–11
- [3] М. Н. Вялый, Пфаффианы, или искусство расставлять знаки...// Матем. просв., сер. 3, 9, Изд-во МЦНМО, М., 2005, 129–142
- [4] К. П. Кохась, Разбиения на домино// Матем. просв., сер. 3, 9, Изд-во МЦНМО, М., 2005, 143–163
- [5] К. П. Кохась, Разбиение ацтекских алмазов и квадратов на домино, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVI, Зап. научн. сем. ПОМИ, 360, ПОМИ, СПб., 2008, 180–230
- [6] Е. Ю. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014
- [7] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Том 2. М.: Мир, 2009
- [8] D. Bressoud. Proofs and confirmations: the story of the alternating sign-matrix conjecture. МАА, 1999
- [9] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings, I // J. Algebraic Combin. 1 (1992), 111–132
- [10] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings, II // J. Algebraic Combin. 1 (1992), 219–234
- [11] Eu, Sen-Peng; Fu, Tung-Shan A simple proof of the Aztec diamond theorem. Electron. J. Combin. 12 (2005), Research Paper 18, 8 pp. (electronic).
- [12] A. B. Goncharov, R. Kenyon, Dimers and cluster integrable systems // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 46 (2013), no. 5, 747–813.
- [13] W. Jockusch, J. Propp, P. Shor, Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem // preprint [arXiv:math/9802068](https://arxiv.org/abs/math/9802068)
- [14] R. Kenyon, A. Okounkov, What is... a dimer? // Notices of the AMS, 52 (2005), no. 3, 342–343
- [15] E. H. Kuo. Applications of Graphical Condensation for Enumerating Matchings and Tilings // Theoretical Computer Science, 319 (2004), 29–57
- [16] J. Propp. Generalized domino-shuffling // Theoret. Comput. Sci. 303 (2003), no. 2-3, 267–301.
- [17] Speyer, David E. Perfect matchings and the octahedron recurrence // J. Algebraic Combin. 25 (2007), no. 3, 309–348
- [18] R. Stanley. Catalan Addendum (to Enumerative Combinatorics, vol. 2). Available online at <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>

НИУ ВШЭ, ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, УЛ. ВАВИЛОВА, 7, 117312 МОСКВА
E-mail address: esmirnov@hse.ru