Алексей Антонович Глуцюк

Задачи по курсу "Бильярды, интегрируемость и хаотичность"

Задача 1. Оцените сверху число вершин бильярдной траектории в секторе с заданным углом α.

Задача 2. Придумайте механическую систему, сводящуюся к остроугольному треугольному бильярду.

Задача 3. Пусть в четырёхугольном бильярде $ABCD$ существует четырёхугольная (периодическая) орбита, которая последовательно отражается от сторон бильярда, занумерованных по часовой стрелке: по одному отражению от каждой стороны.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

б) Верно ли обратное: если четырёхугольный бильярд вписан в окружность, то в нем существует четырёхугольная орбита вышеуказанного типа?

Задача 4. В произвольном прямоугольном бильярде

а) постройте периодическую орбиту произвольного четного периода;

б) докажите, что не бывает периодических орбит нечётного периода.

Задача 5. Докажите, что в бильярде в любом прямоугольном треугольнике всегда существует периодическая орбита, хотя бы одно из ребер которой ортогонально одному из катетов.

Указание: использовать подходящую развертку.

Задача 6. Докажите теорему Прокла для двух софокусных эллипсов: прямая, касающаяся меньшего эллипса E, после отражения от большего эллипса снова коснется E.

Задача 7. Сформулируйте и докажите теорему Прокла для произвольной пары софокусных коник: эллипс-гипербола; гиперболы; параболы. Для этого придумайте определения фокуса гиперболы и параболы.

Задача 8. Сформулируйте и докажите аналог теоремы о коммутирующих софокусных эллиптических бильярдов для случая произвольной пары софокусных коник, см. вышеупомянутые пары.

Задача 9. В интегрируемом выпуклом бильярде каждая каустика задает инвариантную окружность в фазовом пространстве бильярда (цилиндре в пространстве ориентируемых прямых). Преобразование бильярда действует на инвариантной окружности поворотом на некоторый угол (зависящий от каустики) в подходящей координате. Докажите, что угол поворота строго монотонно зависит от каустики: чем ближе каустика к границе, тем угол меньше.

Задача 10. Веревочная конструкция. Рассмотрим выпуклую область B на плоскости и веревочное кольцо длины большей, чем длина её границы. Обтянем область веревкой, натянем веревку, потянув ее за одну точку, и после натяжения вставим карандаш в точку, за которую тянули. А теперь поведем карандаш по плоскости вокруг области так, чтобы веревка оставалась натянутой. Докажите, что граница области B есть каустика в бильярде, нарисованном карандашом.

Задача 11. Докажите теорему Дж.Мазера: в выпуклом бильярде, граница которого имеет нулевую кривизну в некоторой точке, не может быть каустик.