Лемма Шпернера: приложения и обобщения

О. Р. Мусин

UTB и ИППИ РАН

ЛШСМ–2015

Литература

Ю. А. Шашкин, Популярные лекции по математике: Неподвижные точки. — Москва: Наука, 1989

Ю. А. Шашкин, Комбинаторные леммы и симплициальные отображения, Екатеринбург: УрГУ, 1999.

Теорема Брауэра (1910, 1912)

Теорема Брауэра о неподвижной точке.
У всякого непрерывного отображения $f : B^n \to B^n$ найдется неподвижная точка x, т. е. $f(x) = x$.

Здесь B^n обозначает n-мерный шар.

Лемма Шпернера (1928)

Теорема

(Лемма Шпернера) *При любой Шпернеровской раскраске вершин триангуляции n-мерного симплекса найдется ячейка триангуляции, вершины которой покрашены во все цвета*

Лемма Шпернера

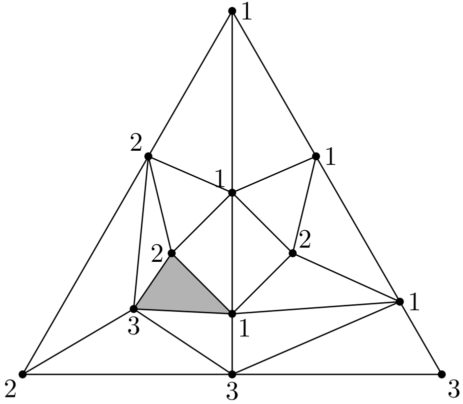


Рис.: 2-мерная иллюстрация Леммы Шпернера

Лемма KKM (1929)

Лемма KKM (Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz)
Предположим, что d-симплекс Δ^d с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{d+1}$ покрыт $d+1$ замкнутым множеством $\{C_i\}$ при $i \in I := \{1, 2, \ldots, d+1\}$, так что если $I_k \subset I$ грань Δ^d с вершинами A_i, $i \in I_k$, то она должна быть покрыта C_i, где $i \in I_k$. Тогда у всех множеств C_i имеется общая точка пересечения.

В частности, если треугольник Δ покрыт замкнутыми множествами C_1, C_2, C_3 так что $A_i \in C_i$ и A_iA_j покрыто $C_i \cup C_j$, то у всех множеств C_i имеется общая точка.

Теорема Люстерника–Шнирельмана (1930)

Предположим, что $F_1, \dots, F_{n+1}$ *является покрытием сферы* $\mathbb{S}^n$ $n+1$ *замкнутым множеством. Тогда найдется* F_i*, которое содержит пару антиподальных точек* $(x, -x)$*. Иными словами,* $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$*.*

(Покрытие замкнутыми множествами можно заменить на покрытие открытыми.)

Теорема Борсука–Улама (1933)

(1) *Для всякого непрерывного отображения* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *найдется точка* $x \in \mathbb{S}^n$ *такая, что* $f(x) = f(-x)$.

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *антиподально*, если $f(-x) = -f(x)$.

(2) *Для всякого непрерывного антиподального отображения* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *найдется точка* $x \in \mathbb{S}^n$ *такая, что* $f(x) = 0$, *т.е. множество нулей* $Z_f = \{f^{-1}(0)\}$ *не пусто.*

J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Теорема Борсука–Улама

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]). *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]). *Ist $f \epsilon R^{n^{S_n}}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \epsilon S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Теорема Какутани (1941)

Многозначным отображением из множества X в Y называется всякое отображение $F : X \to 2^Y$. Пусть $\Omega(Y) \subset 2^Y$, состоящее из непустых компактных подмножеств множества $Y \subset \mathbb{R}^m$, то есть $F : X \to \Omega(Y)$.

Теорема Какутани: *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное, выпуклое подмножество и многозначное отображение $F : X \to \Omega(X)$ имеет своими значениями компактные, выпуклые множества и является полунепрерывным сверху по включению. Тогда отображение F имеет неподвижную точку $x_* \in X$, то есть $x_* \in F(x_*)$.*

Лемма Таккера (1945)

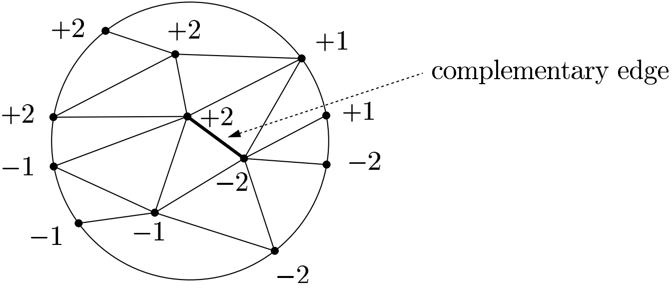
Теорема (Таккер)

Пусть Λ – триангуляция шара $\mathbb{B}^d$, которая является антиподальной на границе. У любой раскраски

$$L : V(\Lambda) \to \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$$

являющейся антиподальной на границе, т. е. $L(-v) = -L(v)$ для любой вершины v на границе шара $\mathbb{B}^d$ найдется "диполь" ("complementary edge"): ребро с метками имеющими одинаковую абсолютную величину и противоположные знаки.

Лемма Таккера



Лемма Таккера для сферы

Теорема

Пусть Λ – антиподальная триангуляция $\mathbb{S}^d$. Предположим, что

$$L : V(\Lambda) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +d, -d\}$$

является антиподальным, т. е. для всех вершин Λ: $L(-v) = -L(v)$. Тогда найдется диполь (complimentary edge).

Теорема Нэша о равновесии (1950)

Игрой называется набор множеств (стратегий) $S_1, \ldots, S_n$ и набор функций (выигрыша) $u_1, \ldots, u_n$ на $X = S_1 \times \ldots \times S_n$.

Теорема

Предположим, что каждое множество S_i – выпуклый компакт, а функции выигрыша u_i непрерывны по всем переменным и вогнуты по s_i. Тогда существует равновесие Нэша. То есть найдутся $s_1^*, \ldots, s_n^*$ такие что для любого i и $s_i \in S_i$:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, s_n^*) \leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, s_n^*).$$

Лемма Ю. А. Шашкина

Теорема

Пусть T триангуляция ц. с. многоугольника, которая является ц. с. на его границе. Предположим, что разметка

$$L : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, +3, -3\}$$

на границе является антиподальной, т. е. $L(-v) = -L(v)$ для любой вершины v на границе. Предположим также, что у этой разметки на нет диполей. Тогда для любых a, b, c, где $|a| = 1,\ |b| = 2,\ |c| = 3$, общее число треугольников в T с метками (a, b, c) и $(-a, -b, -c)$ – нечетно.

Лемма Ю. А. Шашкина

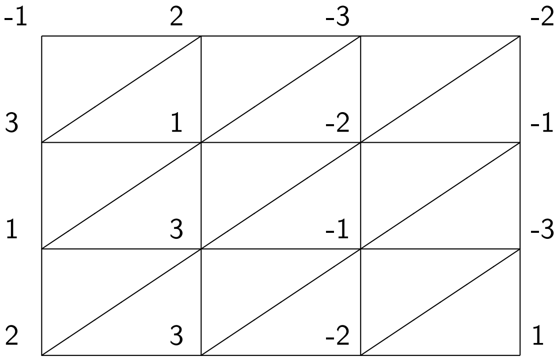


Рис.: Иллюстрация леммы Шашкина

Лемма Ю. А. Шашкина

$(a, b, c) = (1, 2, 3)$, $(1, -2, 3)$, $(1, 2, -3)$ и $(1, -2, -3)$
Лемма утверждает, что число треугольников с метками (a, b, c) и $(-a, -b, -c)$ – нечетно. Обозначим его $\mathrm{SN}(a, b, c)$. Тогда на картинке:

$$\mathrm{SN}(1, 2, 3) = 3,\ \mathrm{SN}(1, -2, 3) = 1,$$

$$\mathrm{SN}(1, 2, -3) = 3,\ \mathrm{SN}(1, -2, -3) = 3.$$

Доказательство леммы Шашкина

$$p(1,-2)+p(-2,3)+p(3,-1)+p(-1,2)+p(2,-3)+p(-3,1) \equiv 1(2)$$

$$d(1,-2)+d(-2,3)+d(3,-1) \equiv 1 \pmod 2 \qquad (*)$$

$+$ 7 равенств при замене (a,b) на $(-a,-b)$

Если в $(*)$ "открыть двери" $(1,-2),(-2,3),(3,-1)$, то тупиками будут $(1,-2,-3)$ и $(-1,2,3)$.

Другое доказательство леммы Шпернера

McLennan, Tourky (2008) + С. Л. Табачников

Лемма

$$area(\Delta) = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{2}$$

Другое доказательство леммы Шпернера

$$p(t) := (x + (a - x)t, y + (b - y)t),\ p(0) = (x, y),\ p(1) = (a, b).$$

$\mathrm{area}(\Delta, t)$ - квадратный многочлен.

$$S(t) = \sum_{\Delta \in T} \mathrm{area}(\Delta, t)$$

$S(t)$ =const=площадь треугольника $A_1 A_2 A_3$=1.

$$1 = S(1) = \sum_{i} \mathrm{area}(Sp_i)$$

Лемма Шпернера для многогранника

J. A. De Loera, E. Peterson, and F. E. Su, A Polytopal Generalization of Sperner's Lemma, *J. of Combin. Theory Ser. A*, **100** (2002), 1-26.

Теорема

Пусть T триангуляция выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^d$ у которого n вершин. Тогда у любой Шпернеровской разметки $L : V(T) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется не менее $(n - d)$ п. к. d–симплексов.

Möbius band

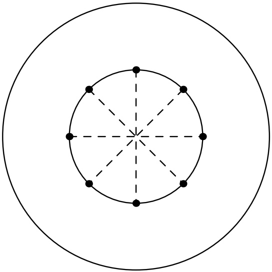
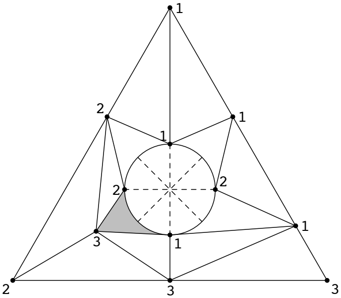


Рис.: Möbius band. Diametrically opposite points of the inner boundary circle are to be identified. The outer circle is the boundary of the Möbius band.

Sperner's lemma for the Möbius band



Degree and Sperner's lemma

Теорема

Let P be a convex polytope in $\mathbb{R}^d$ with vertices $p_1, \ldots, p_n$. Let X be a finite orientable d-dimensional simplicial complex. Let $L : V(X) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ be a labelling such that $f_{L,P}(\partial X) \subset \partial P$. Then there are at least $(n-d)|\deg(f_{L,P})|$ fully labelled d-simplices.

Degree and Sperner's lemma

Corollary

Let X be a finite orientable d-dimensional simplicial complex. Let $L : V(X) \to \{1, 2, \ldots, d+1\}$ be any labelling. Then X contains at least $|\deg(f_{L,P})|$ fully labelled d-simplices.

For Sperner's labelling $\deg(f_{L,P}) = 1$.

The theorem also implies Tucker's lemma. In this case P is a crosspolytope and $\deg(f_{L,P})$ is odd.

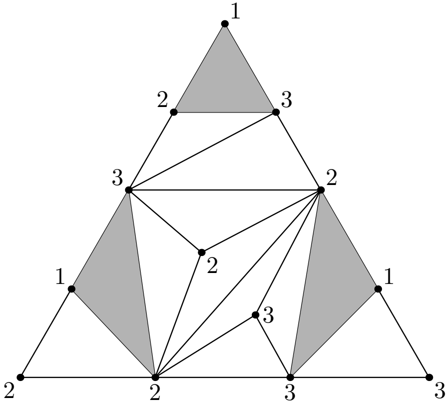


Рис.: $\deg(L, \partial T) = 3$. There are three fully labelled triangles.

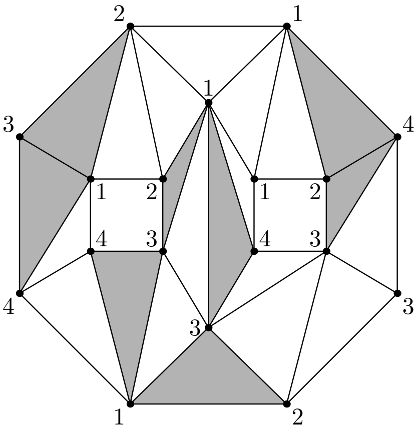


Рис.: Octagon with two square holes. Here $n = 4$, $\deg(L, \partial T)| = 4$ and there are eight fully labelled triangles

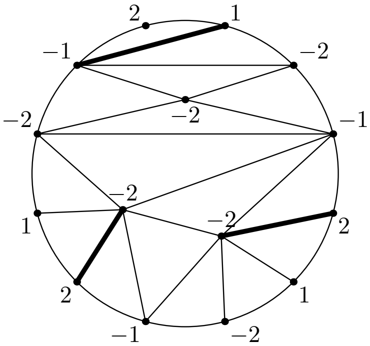
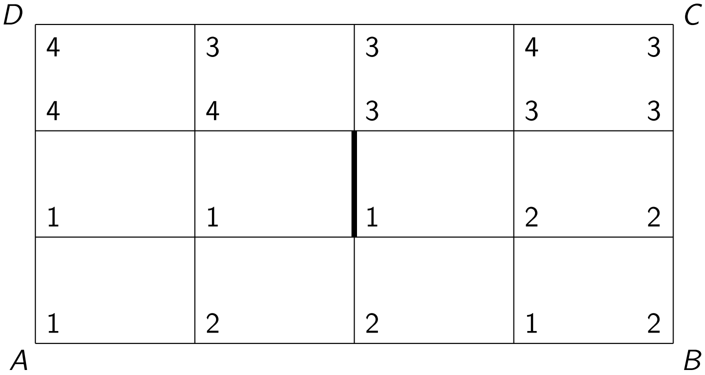
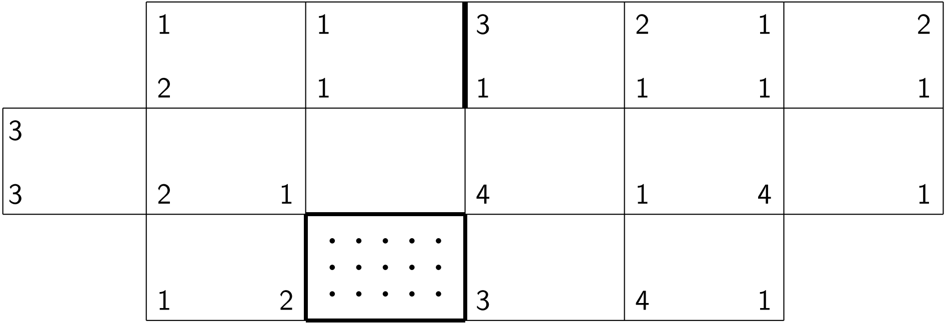


Рис.: Since $\deg(L, \partial T) = 3$, there are three complementary edges.



Sperner's labelling of $\Pi_2(4, 3)$. One edge is colored with $(1, 3)$.



Since $\deg(L, \partial Q) = 2$, there are two centrally labelled cells.

Sperner type lemma for quadrangulations

Let C^d denote the d-dimensional cube.

Theorem

Let Q be a quadrangulation of an oriented d-dimensional manifold M. Suppose $L : V(Q) \to V(C^d)$ be a labelling such that $f_L(\partial Q) \subset \partial C^d$. Then Q contains at least $|\deg(L, \partial Q)|$ centrally labelled cells.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ