Аксиомы ZFC
Вроде и не аксиомы ZFC
Аксиомы равенства

Равенство рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Если заменить аргумент предиката или функции на равный аргумент, значение не изменится.

Аксиомы ZFC

Согласованность

Конструкции

Связь с логическими формулами

Бесконечность

Аксиома выбора

$\forall x, \forall y[\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$.

Множества с одними и теми же элементами совпадают. *Экстенсиональность, объёмность*.

$\forall x[\exists a(a \in x) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in y \wedge z \in x))]$.

Всякое непустое множество содержит элемент, не пересекающийся с этим множеством.

В частности, множество $\{A\}$ никогда не пересекается со своим элементом A, то есть $A \notin A$. Это же запрещает бесконечно убывающие цепочки множеств (при наличии аксиомы бесконечности).

Регулярность.

$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$.

Существование пары (а также множества с ровно одним заданным элементом)

$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A]$.

Существование объединения (любого набора множеств)

Мы будем использовать обозначение $\Cup \mathcal{F}$, хотя оно и не общепринято и даже не самое частое.

$\forall x \exists y \forall z [z \subseteq x \Rightarrow z \in y]$.

Существование множества всех подмножеств, $y = P(x)$.

Связь с логическими формулами

Это схемы аксиом. В них можно рассматривать произвольную логическую формулу, задающее свойство множеств, φ. У формулы даже могут быть дополнительные параметры.

Аксиомы ZFC
Связь с логическими формулами

$$\forall z \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x, w_1, \dots, w_n))].$$

По формуле и набору параметров, мы из множества z можем выделить подмножество всех элементов, удовлетворяющих формуле.

Иногда в дальнейшем параметры мы будем подразумевать, но не писать явно.

Аксиомы ZFC
Связь с логическими формулами

$\forall A \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_n \big[\forall x(x \in A \Rightarrow \exists! y\, \varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n)) \Rightarrow \exists B\, \forall x\big(x \in A \Rightarrow \exists y(y \in B \land \varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n))\big)\big]$.

Если при данном наборе параметров оказалось, что формула φ ведёт себя как отображение (то есть $\varphi_{w_1,\ldots w_n}(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$), то для каждого множества его образ при этом отображении тоже множество.

Замена

Аксиомы ZFC
Бесконечность

$\exists X\,[\varnothing \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow (y \cup \{y\}) \in X)]\,.$

Иногда $y \cup \{y\}$ обозначают $S(y)$.

$S(y)$ гарантированно отличается от y по аксиоме регулярности.

Аксиомы ZFC
Определение пары

Упорядоченная пара: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Две пары равны тогда и только тогда, когда у них одинаковые первые и вторые компоненты.

По паре можно определить её компоненты. Первая компонента пары — это единственный элемент единственного одноэлементного элемента пары. Вторая компонента равна первой компоненте, если у пары только один элемент как у множества, а иначе является единственным неравным первой компоненте элементом единственного двухэлементного элемента пары.

Аксиомы ZFC
Определение пары

Множество всех упорядоченных пар (x, y), таких что первый элемент пары принадлежит множеству A, а второй — множеству B, называется декартовым произведением множеств и обозначается $A \times B$.

Аксиомы ZFC
Аксиома выбора

Мы будем использовать в качестве аксиомы теорему Цермело (в классическом изложении её выводят из аксиомы выбора).

...

Всякое множество можно вполне упорядочить.

Упорядочение: множество упорядоченных пар с аксиомами порядка

Полнота порядка: в каждом непустом подмножестве есть наименьший элемент

Модель без аксиомы бесконечности

Если выкинуть аксиому бесконечности, то есть простая модель из натуральных чисел

n-й бит двоичной записи числа m отвечает за утверждение $n \in m$.

Это же можно записать как модель из всех конечных строк из символов $\{$ и $\}$ с условиями корректности скобочной структуры, а также упорядоченности и уникальности подструктур на каждом уровне. Это просто стандартная запись множеств, но без запятых.

Например, $5_{dec} = 101_{bin}$, поэтому $0 \in 5, 1 \notin 5, 2 \in 5$.

Модель без аксиомы бесконечности

Это же можно записать как модель из всех конечных строк из символов $\{$ и $\}$ с условиями корректности скобочной структуры, а также упорядоченности и уникальности подструктур на каждом уровне. Это просто стандартная запись множеств, но без запятых.

Вторую запись можно расширить, сохраняя регулярность, но не её интуитивный смысл. Добавим записи вида $+123$ и скажем, что $+124 \in +123$ и является единственным элементом. При этом надо запретить $\{+7\}$, требуя писать это как $+6$, но бывает $\{+7 + 10 + 0 - 4\}$.

У нас нет множеств с бесконечным числом элементов, поэтому регулярность не нарушится, но $\ldots \in +2 \in +1 \in +0 \in -1 \in -2 \ldots$.

Модель без аксиомы бесконечности

Добавим записи вида $+123$ и скажем, что $+124 \in +123$ и является единственным элементом. При этом надо запретить $\{+7\}$, требуя писать это как $+6$, но бывает $\{+7+10+0-4\}$.

У нас нет множеств с бесконечным числом элементов, поэтому регулярность не нарушится, но $\ldots \in +2 \in +1 \in +0 \in -1 \in -2 \ldots$.

Регулярность не нарушится, так как каждое множество имеет конечную запись и можно всё переписать в терминах самого глубокого упоминаемого множества вида +123 (что мы запретили делать в канонической записи, но что удобно для доказательства).

Транзитивные множества

Транзитивное множество содержит все элементы своих элементов.

$\forall y \in x, \forall z \in y : z \in x$

Ординал — транзитивное множество, такое что его элементы тоже содержат все элементы своих элементов.

$\forall u \in z \in y \in x : u \in y$

Второе условие существенно: $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \varnothing\}$

Третье аналогичное условие уже не нужно: $v \in u \in z \in y \in x \Rightarrow v \in u \in z \in x \Rightarrow v \in z$

Натуральные числа

Множество из аксиомы бесконечности надо очистить от лишнего. Натуральные числа — те элементы этого множества, которые есть в любом множестве, отвечающем критерию. Это корректное выделение.

Каждое натуральное число либо пустое множество (то есть 0), либо $S(n)$ при натуральном n (выделим все такие).

Каждое натуральное число является транзитивным множеством и ординалом.

Ординалы, не являющиеся примерами множества из аксиомы бесконечности — это, на самом деле, в точности все натуральные числа. Это можно доказать по индукции.

Индукция по натуральным числам

Натуральные числа можно сравнивать по принадлежности.

Пусть некоторое утверждение верно для натурального числа n всегда тогда, когда оно верно для всех меньших (в частности, для нуля, меньше которого нет). Тогда оно верно для всех натуральных чисел.

Индукция работает и для всех ординалов.

Если свойство $A(\cdot)$ не выполнено для n, либо оно выполнено для всех элементов n, либо можно взять $\{k \in n : \neg A(k)\}$ и взять в нём элемент, не содержащий других элементов.

Все натуральные числа (и даже все ординалы) попарно сравнимы (по индукции).

Сравнимость ординалов

Пусть не все ординалы сравнимы. Пусть α — какой-то минимальный, который хоть с кем-то несравним (таких априори может быть несколько). Пусть β — какой-то минимальный несравнимый с α.

Если хоть один элемент α содержит β или равен ему, $\beta \in \alpha$. Аналогично наоборот.

При этом все элементы α сравнимы с β и наоборот, иначе нарушена минимальность. Поэтому $\alpha = \beta$.

Определение натуральных чисел через ординалы

Каждое натуральное число является ординалом, так как 0 является, а для всякого ординала α ординалом будет и $S(\alpha)$.

Рассмотрим все натуральные числа, которые не являются примерами для аксиомы бесконечности. Среди них точно есть 0.

Если натуральное число n не является примером для аксиомы бесконечности, то $k \in n, S(k) \notin n$. Если бы $S(n)$ являлось таким примером, то в $S(n)$ было бы $S(k)$. Но единственный новый элемент в $S(n)$ — это само число n, а тогда $S(k) = n$ и $S(S(k)) = S(n) \notin S(n)$.

Множество таких натуральных чисел является примером аксиомы бесконечности, тогда оно содержит все натуральные числа.

Определение натуральных чисел через ординалы

Пусть есть минимальный ординал α , не являющийся примером аксиомы бесконечности и не являющийся натуральным числом. Все его элементы — натуральные числа. В нём есть такое $k \in \alpha$, что $S(k) \notin \alpha$. Тогда по сравнимости ординалов ясно, что $S(k) = \alpha$, тогда α является натуральным числом.

Рекурсия по натуральным числам

Можно определять функции с помощью рекурсии через значение в точке 0 и переход от $f(n)$ к $f(S(n))$.

Рассмотрим все корректные начальные отрезки отображения из натуральных чисел. По индукции проверим, что они дают одни и те же значения в общих точках. Тогда каждому n соответствует не больше одного корректного начального отрезка, по аксиоме замены построим множество корректных начальных отрезков и все их объединим. По индукции докажем, что у каждого натурального числа есть образ (если у всех меньших есть, то можно построить корректный начальный отрезок).

Транзитивное замыкание

Пусть дано множество X.

Положим $Tr_X(0) = X$, $Tr_X(S(n)) = Tr_X(n) \cup \Cup Tr_X(n)$.

Транзитивное замыкание $Tr(X)$ — это объединение всех $Tr_X(n)$.

Оно содержит все элементы X и все элементы всех своих элементов, но не обязательно является ординалом.

Структура ординалов

Каждый ординал α либо имеет предыдущий ($\alpha = S(\beta)$), либо является предельным ($\alpha = \mathbb{U}_{\beta\in\alpha}\beta$).

Действительно, если какой-то элемент $\beta \in \alpha$ не содержится ни в каком другом элементе α, то он содержит все остальные элементы α и тогда $\alpha = \beta \cup \{\beta\} = S(\beta)$.

Нетрудно видеть, что натуральные числа — это ординалы, не содержащие предельных ординалов (кроме 0) как элементов.

Рекурсия по ординалам

Можно определять псевдофункции на ординалах с помощью рекурсии, то есть способа определить значение на ординале через значения на всех меньших ординалах.

Опять рассмотрим все корректные начальные отрезки отображения из ординалов. По индукции они дают одни и те же значения в общих точках. Тогда каждому α соответствует не больше одного корректного начального отрезка, по индукции докажем, что у каждого ординала есть образ в каком-то корректном начальном отрезке (если у всех меньших есть, то можно построить корректный начальный отрезок).

По аксиоме замены можно построить функцию из ординалов, являющихся элементами данного.

Рекурсия по ординалам

Почти всегда при определении функции рекурсией по ординалам образ непредельного ординала зависит только от образа предыдущего ординала.

Образ предельного ординала, как правило, равен объединению образов всех меньших ординалов.

Конечно, можно сделать что-то странное:

$$f(0) = \mathbb{N}$$

$$f(S(\alpha)) = P(\alpha \times f(\alpha))$$

$$f(\alpha = \mathbb{U}_{\beta \in \alpha} \beta) = P(\mathbb{U}_{\beta \in \alpha} f(\beta))$$

Кумулятивная иерархия

Мы определим по одному кумулятивному слою для каждого ординала, V_α.

Слои являются транзитивными множествами, слой с большим номером всегда содержит слой с меньшим номером как элемент.

Слой предельного ординала является объединением всех меньших слоёв.

Слой непредельного ординала $\alpha = S(\beta)$ равен $V_\alpha = V_\beta \cup P(V_\beta)$ (предыдущий слой и все его подмножества).

Слой пустого множества пуст, но это и так следует из определения.

Кумулятивная иерархия содержит все множества

Рассмотрим множество X, не принадлежащее кумулятивной иерархии, и его транзитивное замыкание. Рассмотрим все элементы транзитивного замыкания, которые не лежат в кумулятивной иерархии и выберем минимальный по принадлежности элемент Y (он есть по аксиоме регулярности).

Все его элементы лежат в кумулятивной иерархии. Для каждого можно взять номер минимального слоя и по аксиоме замены построить множество нужных номеров слоёв.

Объединим эти номера. Получим номер слоя, где лежат все элементы Y. В следующем кумулятивном слое лежит и сам Y. Противоречие.

Кумулятивная иерархия
Ранг множества

Номер минимального кумулятивного слоя, в котором лежит множество X, называется рангом множества, обозначение $rank(X)$.

Мощности

Два множества A и B называются равномощными, если существует взаимно-однозначное соответствие (множество пар из $A \times B$, которое каждый элемент $x \in A$ содержит как первую компоненту ровно один раз и каждый элемент $y \in B$ содержит как вторую компоненту ровно один раз).

Множество называется конечным, если оно равномощно натуральному числу.

Множество называется счётным, если оно равномощно натуральным.

Каждое подмножество X натуральных чисел конечно или счётно.

Будем строить начальные отрезки соответствия между $\mathbb{N}$ и X. Следующий отрезок должен включать минимальный ещё невключённый элемент. Если у нас есть начальный отрезок, который нельзя продолжить, то X окажется конечным множеством, иначе можно построить доказательство счётности.

Тогда счётная можность — минимальная бесконечная мощность. В качестве мощности она обозначается $\aleph_0$. Натуральные числа, рассматриваемые как числа обозначаются $\mathbb{N}$. В качестве ординала (порядкового типа) натуральные числа обозначаются ω.

Мощности
Множество всех подмножеств $\mathbb{N}$

Множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ несчётно.

Действительно, иначе мы могли бы взять подмножество, отличающееся от нулевого подмножества в нуле, от первого в единице и так далее.

Итак, есть конечные мощности, есть счётная мощность ($\aleph_0$) и есть гарантированно большая мощность $P(\mathbb{N})$.

Мощности
Ординалы и кардиналы
(порядковые и количественные типы)

Всякое множество можно вполне упорядочить. Всякое вполне упорядоченное множество имеет порядок, изоморфный порядку по принадлежности на каком-то ординале. Индукция по ординалам использовала только вполне упорядоченность, так что можно по рекурсии определить соответствующий ординал для каждого элемента.

Всякая мощность задаётся каким-то ординалом (не единственным). Ординалы, являющиеся минимальными ординалами-примерами для своих мощностей, называются кардиналами.

Ординалы также называются порядковыми типами, кардиналы — количественными типами

Мощности

Мощности можно сравнивать, сравнивая их кардиналы. Бесконечные мощности вполне упорядочены и нумеруются ординалами: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$.

Мощность $\aleph_0$ — это мощность натуральных чисел. Континуум-гипотеза — вопрос о совпадении можности $P(\aleph_0)$ с мощностью $\aleph_1$.

Модель из выражений
Общий план

Будем считать, что *ZFC* непротиворечива, то есть из её аксиом нельзя доказать противоречие. Точное определение правил вывода не так важно.

Мы будем постепенно добавлять факты, пользуясь идеей, что всякое доказательство противоречия должно пользоваться конечным число фактов.

Наша цель — получить набор обозначений и аксиом, так что каждое утверждение доказуемо или опровергаемо из аксиом, а для каждого доказуемого утверждения о существовании объекта с некоторым свойством можно привести обозначение какого-то объекта с таким свойством.

Заменим аксиомы однозначных операций над множествами на функциональные символы и аксиомы об их значении.

Заменим аксиому бесконечности на утверждение о существовании множества натуральных чисел.

Для наглядности можно заменить аксиому выбора на аксиому упорядочения каждого кумулятивного слоя, но это не сильно повлияет.

Аксиома выделения породит счётное количество функциональных символов, как и аксиома замены.

Рассмотрим все возможные выражения, описывающие множества.

Рассмотрим также все возможные утверждения. Упорядочим все утверждения в алфавитном порядке. Начнём с пустого списка одобренных утверждений; будем рассматривать утверждения по очереди и те, которые нельзя опровергнуть из аксиом и уже внесённых в список утверждений, будем вносить в список. В пределе мы получим список утверждений, из которых нельзя получить противоречие и который содержит все аксиомы.

Каждое утверждение либо входит в список, либо является отрицанием утверждения из списка.

Полная теория

Модель из выражений
Экзистенциальная полнота

У нас есть описание, что мы будем считать истиной в новой модели, но это описание может требовать существования объектов, для которых у нас нет выражений.

Поэтому переберём все одобренные утверждения, если это утверждение доказывает существование объекта, но ни одно выражение не описывает такой объект, добавим константу, задающую такой объект.

Так мы добавим сколько-то новых имён объектов.

Модель из выражений
Экзистенциальная полнота

Мы добавили новые имена объектов.

У нас появились новые выражения и утверждения. Переберём все новые утверждения и расширим наш список истинных утверждений, как раньше.

Будем повторять перебор всех утверждений с добавлением аксиом и перебор с добавлением констант по очереди.

Полученный набор утверждений непротиворечив, так как противоречие появилось бы на каком-то шаге, а мы не добавляли утверждений, отрицание которых уже можно было доказать — например, от противного.

Каждое утверждение о существовании можно проиллюстрировать каким-то выражением.
Экзистенциальная полнота

Набор выражений и утверждений счётен.

Объявим моделью множество классов эквивалентности выражений по отношению к доказуемому равенству выражений.

Метод вынуждения
Общий план

Мы хотим расширить нашу модель, добавив в неё новые множества.

Для этого мы добавим новое множество в нашу модель, а также всё, что ещё понадобится. Добавляемое множество будет подмножеством заранее выбранного множества, и оно будет подчиняться некоторым ограничениям.

Наш план в том, что таким образом мы научимся добавлять множество, задающее $\aleph_2$ разных подмножеств множества мощности $\aleph_0$.

Плотные множества и фильтры общего положения

Рассмотрим частично упорядоченное множество (ЧУМ) $\mathcal{S}$.

Будем считать, что у него есть наименьший элемент $\perp$.

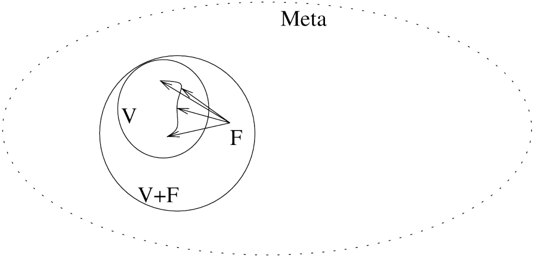
Неформальный смысл: большие элементы будут давать нам больше информации о том, какое именно расширение мы выбрали. Предупреждение: есть статьи и учебники с разной интерпретацией порядка! Бывает «больше информации», а бывает «больше неопределённости».

Частично упорядоченное множество будет множеством возможных решений при выборе конкретных деталей расширения. Большее решение автоматически влечёт меньшее, но многие просто несравнимы.

Плотные множества и фильтры общего положения

Плотные множества и фильтры общего положения — подмножества выбранного частично упорядоченного множества. При этом плотные множества являются внутренними подмножествами (то есть подмножествами в смысле модели), а фильтр общего положения может быть внешним подмножеством (то есть не являться множеством и вообще определимым внутри модели).

Плотные множества и фильтры общего положения



Базовая модель V живёт внутри внешнего мира *Meta*. Расширенная модель $V+F$ тоже лежит внутри внешнего мира и будет содержать фильтр F как множество. Фильтр состоит из точек $S \subset V$, но сам он не описывается никаким множеством в V. Мы будем описывать фильтр средствами внешнего мира.

Плотные множества являются обычными множествами базовой модели V.

Плотные множества и фильтры общего положения

Подмножество ЧУМ называется замкнутым вверх, если оно содержит вместе с каждым элементом все большие. Замкнутое вниз подмножество содержит вместе с каждым элементом все меньшие.

Два элемента ЧУМ называются согласованными, если есть элемент, больший их обоих.

Плотные множества и фильтры общего положения

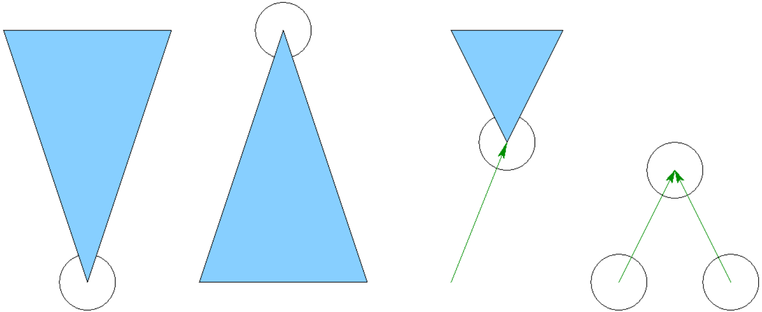
Плотные множества и фильтры общего положения — соответственно внутренние подмножества и внешние подмножества выбранного частично упорядоченного множества.

Плотное множество: замкнуто вверх и для любого элемента ЧУМ содержит больший элемент, $\forall p \in \mathcal{S} : \exists q \geqslant p : q \in \mathcal{D}$.

Переходами к большему элементу до плотного множества можно отовсюду дойти и невозможно выйти.

Фильтр общего положения: замкнут вниз, все его элементы попарно согласованы, пересекается со всеми плотными множествами.

Плотные множества и фильтры общего положения



Замкнутость вверх, замкнутость вниз, условие плотности, условие согласованности.

Добавление фильтра

Наша цель — построить модель, содержащую выбранный фильтр $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

Строим новую интерпретацию *ZFC* на том же носителе. Каждое множество является описанием некоторого множества в описываемой расширенной модели. Множество-описание называют также именем множества в расширенной модели. У одного множества в расширенной модели может быть много имён, каждое из которых лежит в базовой модели. Мы будем обозначать множество с именем a крышечкой над именем, $\hat{a}$

Мы хотим внутри старой модели определить связь между принадлежностью отдельных элементов фильтру и утверждениями в новой модели.

На самом деле, в каждом множестве нас будут интересовать только его элементы, являющиеся парами из элемента ЧУМ и какого-то множества.

Каждый такой элемент означает, что мы добавляем в качестве элемента описываемое второй компонентой множество, если условие (первая компонента) попало в фильтр.

Если описание b содержит пару (p, a), а фильтр содержит элемент ЧУМ p, то множество расширенной модели $\hat{b}$, описываемое именем b, содержит множество $\hat{a}$ с именем a.

$$p \in \mathcal{S}, (p, a) \in b, p \in \mathcal{F} \Rightarrow \hat{a} \in \hat{b}$$

Будем говорить, что p вынуждает $\hat{a} \in \hat{b}$ и писать $p \models \hat{a} \in \hat{b}$.

Мы хотим понять, достаточно ли вхождения p в фильтр для выполнения некоторого утверждения. Используются стандартные замены: $\exists\varphi$ как $\neg\forall\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ как $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, и так далее.

Что такое принадлежность?

$(p, a) \in b, p \in \mathcal{F} \Rightarrow \hat{a} \in \hat{b}$

$(p, a) \in b \Rightarrow p \models \hat{a} \in \hat{b}$

$p \models \hat{a} = \hat{c} \in \hat{b} \Rightarrow p \models \hat{a} \in \hat{b}$

$p \geqslant q \models \hat{a} = \hat{c} \in \hat{b} \Rightarrow p \models \hat{a} \in \hat{b}$

А так как фильтр общего положения, то на самом деле достаточно $\forall q \geqslant p : \exists r \geqslant q : r \models \hat{a} \in \hat{b}$

Добавление фильтра
Выражение новых утверждений в старой модели

Что такое отрицание φ? Если никакой совместимый с p элемент не может вынудить φ, включение p гарантирует $\neg\varphi$.

Как вынудить равенство $\hat{a} = \hat{b}$? Надо, чтобы ни для какого имени c нельзя было вынудить $\hat{c} \in \hat{a}\Delta\hat{b}$.

То есть $\forall q \geqslant p : q \models \hat{c} \in \hat{a} \Leftrightarrow \hat{c} \in \hat{b}$. Если какой-то элемент ЧУМ q вынуждает принадлежность $\hat{c} \in \hat{a}$, но не $\hat{c} \in \hat{b}$, то есть более высокий элемент, вынуждающий $\hat{c} \notin \hat{b}$.

Добавление фильтра
Выражение новых утверждений в старой модели

Существует формализация вынуждения:

$1. p \models \hat{a} \in \hat{b}$ if $(\forall q \geq p)(\exists r \geq q)(\exists s, c)((s, c) \in b \wedge r \geq s \wedge r \models \hat{a} = \hat{c})$.

$2. p \models \hat{a} = \hat{b}$ if $(\forall q \geq p)(\forall c)(q \models \hat{c} \in \hat{a} \Leftrightarrow q \models \hat{c} \in \hat{b})$.

(взаимная рекурсия между равенством и принадлежностью каждый раз уменьшает минимальное из сравниваемых имён)

$3. p \models \neg\varphi$ if $\neg(\exists q \geq p) q \models \varphi$.

$4. p \models (\varphi \wedge \psi)$ if $(p \models \varphi \ \wedge \ p \models \psi)$.

$5. p \models (\forall t)\varphi(t)$ if $(\forall x) p \models \varphi(\hat{x})$.

Это всё выразимо внутри базовой модели.

$1. p \models \hat{a} \in \hat{b}$ if $(\forall q \geq p)(\exists r \geq q)(\exists s, c)((s, c) \in b \wedge r \geq s \wedge r \models \hat{a} = \hat{c})$.

Заметим, что нам достаточно плотного выше p множества, вынуждающего принадлежность.

$3. p \models \neg\varphi$ if $\neg(\exists q \geq p) q \models \varphi$.

Если отрицание φ плотно выше p, то никто выше p не может вынуждать φ.

$2. p \models \hat{a} = \hat{b}$ if $(\forall q \geq p)(\forall c)(q \models \hat{c} \in \hat{a} \Leftrightarrow q \models \hat{c} \in \hat{b})$.

Если какой-то элемент ЧУМ q вынуждает принадлежность $c \in a$, но не $c \in b$, то есть более высокий элемент, вынуждающий $c \notin b$.

Фильтр общего положения порождает полную теорию

Множество элементов, вынуждающих либо φ, либо $\neg\varphi$ плотно. Действительно, если из p нельзя пойти вверх и вынудить φ, то p уже вынуждает $\neg\varphi$. Значит, по каждому утверждению мы определимся. Кроме того, нельзя вынудить одновременно φ и $\neg\varphi$.

Если некоторый элемент вынуждает φ, то и все большие тоже вынуждают (индукция по построению формулы).

Формальная интерпретация вынуждения для логических связок совпадает с их смыслом.

Расширенная модель
Аналоги множеств базовой модели

Индукция по кумулятивной иерархии. Пусть есть множество X и при этом множество X_e содержит все описания элементов X (элементы в более низких кумулятивных слоях, поэтому у них есть описания).

Тогда X описывается множеством $X' = \{(\perp, x') \mid x' \in X_e\}$, где $\perp$ — минимальный элемент частично упорядоченного множества (он обязан входить во все фильтры).

Заметим, что это сразу доказывает аксиому бесконечности (можно рассмотреть аналог множества натуральных чисел).

Фильтр принадлежит расширенной модели

Расмотрим в качестве описания множество вида $\{(p, p') | p \in \mathcal{S}\}$, где p пробегает элементы частично упорядоченного множества, а p' пробегает их описания в расширенной модели.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Аксиомы равенства

Рефлексивность, симметричность и транзитивность следуют из аналогичных свойств для равносильности утверждений.

Определение принадлежности явным образом обеспечивает принадлежность элементов, равных уже принадлежащим.

Объёмность

Равенство с самого начала определяется через равносильность принадлежности.

(Регулярность проверим чуть позже)

Конструктивная проверка аксиом ZF

Построение пары

Пара множеств с именами A и B имеет имя $\{(\perp, A), (\perp, B)\}$.

Построение объединения

Объединение элементов множества $\hat{A}$ описывается, например, множеством $\{(r, x) \mid (p, x) \in y, (q, y) \in A, r \geqslant p, r \geqslant q\}$.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Построение множества всех подмножеств

Пусть дано множество с именем A. Пусть B — множество вторых компонент множества A. Рассмотрим декартово произведение нашего ЧУМ и B, обозначим это произведение $C = \mathcal{S} \times B$.

Теперь рассмотрим $\{(p, X) \mid X \subseteq C, p \models \hat{X} \subseteq \hat{A}\}$.

Множество с таким описанием может содержать только подмножества множества $\hat{A}$ с описанием A. С другой стороны, пусть верно утверждение $p \models \hat{Z} \subseteq \hat{A}$. Тогда $\{(q, x) \mid x \in B, q \geqslant p, q \models \hat{x} \in \hat{Z}\}$ описывает то же подмножество, что и Z. Каждый элемент множества $\hat{Z}$ равен какому-то элементу множества $\hat{A}$, а у этого элемента есть описание в B. С другой стороны, это описание является подмножеством C.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Аксиома выделения

Для выделения из множества, описываемого A, элементов, удовлетворяющих формуле φ, достаточно рассмотреть множество $\{(r, x) \mid p \models \hat{x} \in \hat{A}, q \models \varphi(\hat{x}), r \geqslant p, r \geqslant q\}$.

Упорядочение кумулятивных слоёв

Если выбран кумулятивный слой, его можно вполне упорядочить.

Тогда его можно переупорядочить, сравнивая сначала ранги элементов. Элементы одного ранга сравниваем по исходному порядку.

Этот новый порядок тоже полный: в любом непустом подмножестве мы можем выделить множество элементов минимального ранга, а среди них уже выбрать минимальный по исходному порядку.

Минимальные описания

Пусть есть множество имён. Рассмотрим минимальный кумулятивный слой, включающий все эти имена. Вполне упорядочим его (с учётом рангов).

Тогда условие, что x является минимальным именем описываемого элемента при включении p в фильтр, выглядит так: $S_x = \{(\perp, y) \mid y < x\}, p \models \hat{x} \notin \hat{S}_x$.

Минимальное описание любого элемента множества меньше, чем минимальное описание этого множества.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Аксиома замены

Пусть мы ищем образ множества с именем A под действием предиката φ, ведущего себя как отображение.

Множество вторых компонент элементов A назовём B.

Рассмотрим множество
$X = \{(p, x) \mid \exists y \in B : p \models \varphi(\hat{y}, \hat{x}), rank(x) = min\ rank(z) : p \models \varphi(\hat{y}, \hat{z})\}$.
Другими словами, рассмотрим множество гарантированных имён для образов с минимальным рангом.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Аксиома замены

Рассмотрим множество гарантированных имён для образов с минимальным рангом.

Это описание является множеством: для каждого p из ЧУМ и каждого элемента B можно выбрать минимальный кумулятивных слой, в котором гарантированно есть имя образа описываемого элемента. Дальше применяем выделение из объединения этих кумулятивных слоёв.

У описываемого множества каждый элемент будет являться образом какого-то элемента множества с именем A. При этом каждый образ элемента должен иметь хоть одно имя в этом описании (имя образа элемента может не лежать в X только из-за наличия более простого имени), так что это действительно описание полного образа.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность
Регулярность аналогов ординалов

Каждый ординал базовой модели имеет аналог в расширенной модели. Докажем, что любое подмножество (в расширенной модели) ординала является имеет минимальный элемент (например, по включению).

Для этого мы докажем, что для каждого подмножества произвольного ординала существует плотное множество элементов ЧУМ, вынуждающих наличие минимального элемента. Так как фильтр общего положения пересекается с каждым плотным множеством, из этого следует наличие минимального элемента.

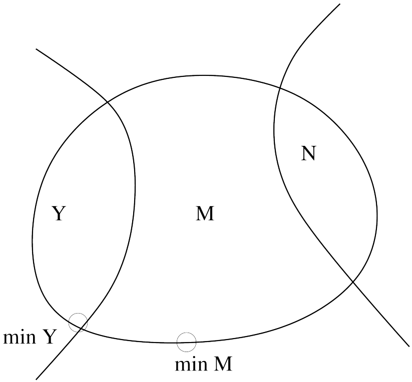
Регулярность аналогов ординалов

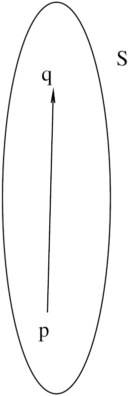
Пусть у нас есть ординал α (и его аналог α' в расширенной модели), и его подмножество с именем A. Рассмотрим произвольный элемент ЧУМ $p \in \mathcal{S}$. Про каждый меньший ординал $\beta \in \alpha'$ спросим, верно ли, что $p \models \hat{\beta} \in \hat{A}$ и верно ли $p \models \hat{\beta} \notin \hat{A}$.

Возможно три варианта ответа («принадлежит», «не принадлежит», «ещё неизвестно»). Соответствующие три множества (обозначим их Y, N и M) принадлежат базовой модели из-за выразимости вынуждения в ней. Поэтому в них есть минимальные элементы.

Рассмотрим такой элемент $q > p$, что $q \models (min(M))' \in \hat{A}$.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность
Регулярность аналогов ординалов





$p \models \hat{Y}' \subseteq \hat{A}$ $\quad p \models \hat{N}' \cap \hat{A} = \varnothing$ $\quad q \models min(\hat{M}') \in \hat{A}$

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность
Регулярность аналогов ординалов

Рассмотрим такой элемент $q > p$, что $q \models (min(M))' \in \hat{A}$.

Тогда $q \models (min(M))' \in \hat{A}, (min(Y))' \in \hat{A}, \forall \beta \in \hat{A} : \beta \geqslant (min(min(M), min(Y)))', min(\hat{A}) = (min(min(M), min(Y)))'$.

Таким образом, для любого элемента ЧУМ есть больший элемент, добавление которого в фильтр вынуждает наличие минимального элемента у множества с именем A. Это нам и требовалось для доказательства полноты (а значит, непустоты пересечения с фильтром).

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность

Пусть A описывает множество, нарушающее аксиому регулярности.

Рассмотрим множество наборов $\{(p, q, x, y, \beta) \mid (p, x) \in A, q \models \hat{x} = \hat{y}, \beta = rank(y) \leqslant rank(x)\}$. Другими словами, рассмотрим все способы упростить запись элементов множества с именем A.

Это множество базовой модели и мы можем взять его аналог в расширенной модели. Более того, в расширенной модели мы можем выделить из него только те упрощения, условия которых входят в выбранный фильтр общего положения.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность

Рассмотрим множество наборов $\{(p, q, x, y, \beta) \mid (p, x) \in A, q \models \hat{x} = \hat{y}, \beta = rank(y) \leqslant rank(x)\}$. Другими словами, рассмотрим все способы упростить запись элементов множества с именем A.

Тогда для каждого элемента описания есть множество (множество в расширенной модели) всех ординалов базовой модели, которые являются номерами кумулятивных слоёв базовой модели, содержащих более простые описания того же элемента. У этого множества есть минимальный элемент.

Конструктивная проверка аксиом ZF
Регулярность

В расширенной модели мы выбрали минимальные описания всех элементов.

Заметим, что если $p \models \hat{x} \in \hat{y}$, то у $\hat{x}$ есть описание строго проще, чем y. Поэтому элемент с описанием из минимального упомянутого кумулятивного слоя не содержит других элементов.

Теорема Цермело в расширении

Возьмём описание, возьмём его вполне упорядочение вместе с минимальным содержащим кумулятивным слоем и сделаем из этого упорядочения описание упорядочения множества в расширении.

Если у нас есть элемент x, вынуждаемый включением p в фильтр и являющийся минимальным описанием своей интерпретации при включении r, и элемент y, вынуждаемый включением q и являющийся минимальным описанием своей интерпретации при включении s, возьмём пару (x, y) (в правильном порядке) и будем её вынуждать всеми $t \geqslant p, q, r, s$. Если p, q, r и s несовместны в совокупности, то нам не понадобится сравнивать x и y.

Рекурсией по вполне упорядоченному множеству — кумулятивному слою в базовой модели — можно построить взаимно-однозначное соответствие между этим кумулятивным слоем и каким-то ординалом. У этого соответствия есть аналог в расширенной модели.

После этого мы знаем, какие из описаний оказались минимальными описаниями. Построенный порядок на множестве согласован со вложением множества (в расширенной модели) сработавших минимальных описаний в какой-то ординал. Это же множество изоморфно описываемому множеству, откуда видно аксиомы порядка.

Это же вложение позволяет проверить наличие минимального элемента в каждом подмножестве.

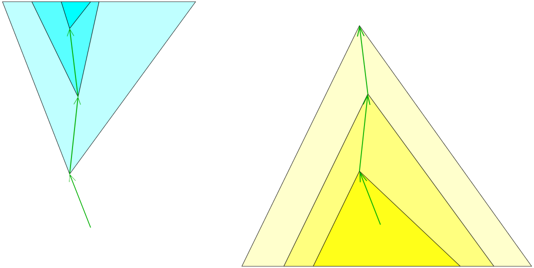
Существование фильтров общего положения

Так как базовая модель счётна с точки зрения внешнего наблюдателя, то и плотных множеств (которые все лежат в ней) не более, чем счётное множество.

Будем строить возрастающую последовательность элементов ЧУМ. Начнём с минимального элемента и будем добавлять для каждого плотного множества элемент, больший всех уже взятых, лежащий в этом плотном множестве. Это возможно по определению плотности.

Теперь возьмём в качестве фильтра множество всех элементов ЧУМ, которые меньше хоть одного из выбранных элементов.

Существование фильтров общего положения



Зелёным цветом показана построенная последовательность, поочерёдно входящая в плотные множества. Далее каждый элемент последовательности приводит к включению в фильтр всех меньших.

Начнём с минимального элемента и будем добавлять для каждого плотного множества элемент, больший всех уже взятых, лежащий в этом плотном множестве. Это возможно по определению плотности.

Для этого во внешнем мире нам тоже нужна аксиома выбора, хотя, возможно, ослабленная (мы выбираем счётную последовательность).

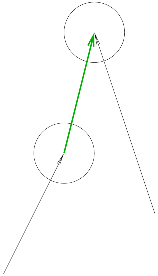
Если совести у нас нет, мы можем пользоваться счётностью модели как полным порядком и всегда выбирать минимальный вариант.

Существование фильтров общего положения
Проверка корректности

По построению наш фильтр пересекается с каждым плотным множеством.

По транзитивности порядка вместе с каждым элементом фильтр содержит все меньшие.

Существование фильтров общего положения
Проверка корректности



Если фильтр содержит какие-то два элемента, то каждый из них был меньше какого-то элемента построенной последовательности. Больший из двух элементов построенной последовательности является общим продолжением.

Конкретные ЧУМ для расширения: фрагменты функций

Пусть есть два бесконечных множества A и B. Рассмотрим множество всех фрагментов функций из A в B с конечной областью определения.

Фрагмент α больше фрагмента β, если область определения фрагмента α содержит область определения фрагмента β и ограничение α на область определения β совпадает с β.

Минимальный элемент — пустой фрагмент.

Конкретные ЧУМ для расширения: фрагменты функций
Фильтры общего положения

Пример плотного множества — все фрагменты, определённые на $x \in A$.

Всякий фильтр общего положения содержит только согласованные фрагменты, то есть фрагменты с общим продолжением. Поэтому фильтр приписывает каждой точке $x \in A$ не более (из-за согласованности) и не менее (из-за общего положения) одного значения.

Таким образом, каждый фильтр общего положения задаёт функцию $f : A \to B$.

Конкретные ЧУМ для расширения: фрагменты функций

Каждый фильтр общего положения задаёт функцию $f\colon A \to B$.

Не каждая функция соответствует фильтру общего положения: например, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x$ не будет общего положения.

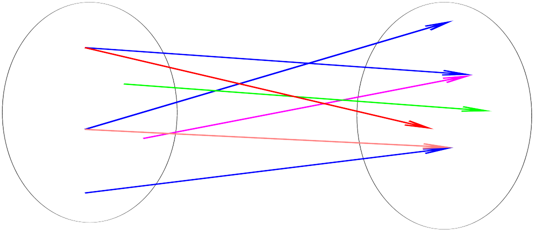
Конкретные ЧУМ для расширения: фрагменты функций
Фрагменты вложений

Рассмотрим теперь фрагменты функций с условием различности образов всех точек в области определения фрагментов.

Можно заметить, что плотным множеством является не только множество фрагментов, определённых в точке $x \in A$, но и множество фрагментов, принимающих значение $y \in B$ в какой-то точке.

Фильтр общего положения по-прежнему задаёт функцию. Условие совместимости гарантирует, что функция будет вложением. При этом функция обязана быть взаимно-однозначной.

Конкретные ЧУМ для расширения: фрагменты функций



Зелёная стрелка задаёт фрагмент, совместимый с синими стрелками. Объединение синих стрелок и зелёной стрелки — фрагмент, больший синего и зелёного.

Фиолетовую стрелку можно добавить к фрагменту из синих стрелок как фрагменту функции, но не как к фрагменту вложения.

Красные стрелки нельзя добавить даже как к фрагменту функции.

Отождествление мощностей

Заметим, что расширение с помощью фильтра общего положения на фрагментах вложений позволяет добавить изоморфизм между любыми двумя бесконечными множествами.

Таким образом можно добиться того, чтобы в расширенной модели аналоги двух неравномощных множеств стали равномощными из-за появления нового изоморфизма.

Добавляем подмножество $\aleph_0 \times \aleph_2$ общего положения.

Подмножество — например, функция из $\aleph_0 \times \aleph_2$ в множество $\{0, 1\}$.

Рассмотрим все сечения, определённые на множествах вида, $\aleph_0 \times \{x\}$. В общем положении они попарно различны, так как для каждой пары сечений их различность вынуждается плотным множеством фрагментов (всегда можно добавить две новых точки в область определения и разные значения в них).

Заметим, что каждое сечение задаёт подмножество $\aleph_0$.

Тогда у нас есть $\aleph_2$ различных подмножеств $\aleph_0$.

Модель без континуум-гипотезы
Сохранение различности мощностей

У нас будут проблемы, если добавился изоморфизм между $\aleph_0$ и $\aleph_1$ или между $\aleph_1$ и $\aleph_2$.

Докажем, что для всякой функции из $\aleph_2$ в $\aleph_2$ в каждой точке множество априори доступных для вынуждения значений не более чем счётно в базовой модели.

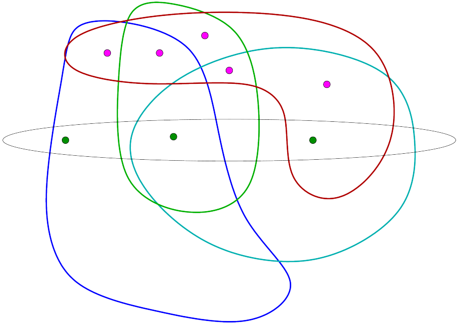
Различные значения в каждой точке должны вынуждать попарно несовместимые фрагменты. Докажем по индукции, что при каждой заданной длине попарно несовместимых фрагментов этой длины конечное число.

Модель без континуум-гипотезы
Сохранение различности мощностей

Докажем по индукции, что при каждой заданной длине попарно несовместимых фрагментов этой длины конечное число.

Выберем один фрагмент. Каждый из остальных от него отличается хотя бы в одной позиции. Этих позиций конечное количество. Два фрагмента, отличающиеся от данного в одной и той же позиции, совпадают в ней друг с другом. Тогда они попарно различны в оставшейся части меньшей длины. Воспользовавшись предположением индукции, получаем конечное объединение конечных множеств.

Модель без континуум-гипотезы
Сохранение различности мощностей



Зелёные точки входят в выбранный фрагмент, остальные фрагменты отличаются от него в зелёных точках, а друг от друга в лиловых точках.

Впрочем, два фрагмента отличаются друг от друга только в зелёной точке, так как она не единственная для одного из них.

Конструктивные множества

Если у нас есть натуральные числа и отображения, то можно определить понятие внутренней формулы с параметрами. Если все кванторы ограничены (то есть не бывает кванторов $\exists x$, только $\exists x \in A$), то можно индукцией по длине формулы определить, какое множество формула выделяет из каждого заданного множества при заданном наборе параметров.

Обозначим $Def(X)$ как множество всех множеств, выделяемых внутренними формулами из X (при параметрах тоже из X; ограничениям на кванторы при этом разрешается быть по всему X).

Конструктивные множества

Множество конструктивно выделяемых из X множеств обозначено $Def(X)$.

Конструктивный слой определяется как $L_\alpha = \Cup_{\beta\in\alpha} Def(L_\beta)$.

$L_0 = \varnothing, L_1 = \{\varnothing\}, L_2 = \{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \ldots, L_\omega = \Cup_{n\in\omega} L_n, \ldots$

Конструктивное множество — множество, лежащее хотя бы в одном конструктивном слое.

Конструктивные множества

Оказывается, что если в модели ZF взять конструктивные множества, получится модель ZFC (ну просто каждое множество можно закодировать ординалами и получается глобальное выразимое псевдоотношение полного порядка).

Более того, в конструктивных множествах всегда верна континуум-гипотеза.

Аксиома зависимого счётного выбора

Счётный зависимый выбор (DC): если есть множество начальных отрезков последовательностей, в котором каждый отрезок имеет продолжение, то существует счётная последовательность, сколь угодно длинные начальные отрезки которой лежат в заданном множестве.

Отсюда, в частности, уже следует лемма о бесконечной ветви: в дереве с конечными степенями всех вершин и бесконечным количеством вершин есть бесконечный путь (стандартное доказательство не требует больше, чем DC).

Результат Соловэя

Пусть ZFC непротиворечива и непротиворечива вместе с требованием существования счётной транзитивной модели и несчётной недостижимой мощности (любые операции с меньшими мощностями оставляют мощность меньше недостижимой).

Тогда непротиворечива $ZF + DC + LM$.

LM: всякое множество вещественных чисел измеримо, всякая ограниченная функция на отрезке интегрируема.

Конструктивные множества
Свойства

Если $U \subseteq V$ — транзитивное внешнее подмножество вселенной (то есть модели), содержащее все ординалы V и тоже являющееся моделью, то конструктивные множества относительно U и относительно V совпадают.

Новых ординалов в U появиться не может. Дальше по индукции по ординалам.

На самом деле, класс (внешнее множество) всех конструктивных множеств L является наименьшей подмоделью ZFC, содержащей все ординалы.

Конструктивные множества
Принцип отражения

Пусть каждому ординалу α приписано множество W_α, причём соответствие $\alpha \mapsto W_\alpha$ задаётся формулой. Обозначим $W_{<\alpha} = \Cup_{\beta\in\alpha} W_\beta$.

Тогда для каждого ординала $\beta \in V$ и каждой формулы $\varphi(x)$ найдётся ординал $\alpha > \beta$, такой что $\forall u \in W_{<\alpha} : W \models \varphi(u) \Leftrightarrow W_{<\alpha} \models \varphi(u)$. Это же будет верно для формул с параметрами при подстановке параметров из $W_{<\alpha}$. Более того, это же будет верно для любого конечного набора формул.

Конструктивные множества
Принцип отражения

Идея в том, что при рассмотрении формул индукцией по построению единственный нетривиальный случай — квантор. При этом можно для каждого элемента рассматриваемого слоя рассмотреть минимальный слой, в котором уже есть пример, после чего объединить по всем элементам. Это потребует рассмотреть все элементы большего слоя, что мы и сделаем — счётное число раз — и объединим последовательность слоёв.

Результат Соловэя
Связь с вынуждением

Модель с недостижимой мощностью расширяется со схлопыванием недостижимой мощности в счётную. После этого оставляются только множества, которые «выразимы» через какую-то нестандартную счётную последовательность ординалов.

Результат Соловэя
Устройство вещественных чисел в модели

В модели будут случайные и неслучайные вещественные числа. Неслучайные числа в совокупности имеют меру ноль. В построенной модели случайные числа в любом множестве — те же, что в каком-то борелевском (которое гарантированно измеримо).

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Аксиома выбора:
Пусть X — множество непустых попарно непересекающихся множеств. Тогда мы можем выбрать множество, содержащее по одному элементу из каждого множества в X.

Теорема Цермело:
Любое множество может быть вполне упорядочено.

Лемма Цорна:
Если всякое множество попарно сравнимых элементов в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M меньше некоторого максимального.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Пусть дано множество X. Применим аксиому выбора к множеству $\{(x, A) \mid x \notin A \subsetneq X\}$. Мы получим функцию f, которая каждому подмножеству X (кроме всего X) сопоставляет элемент, не лежащий в нём.

Мы хотим задать полный порядок $\leqslant$ на X, такой что каждый элемент $x \in X$ будет образом множества всех строго меньших элементов, то есть $\forall x \in X : x = f(\{y \in X \mid y < x\})$.

Для доказательства мы рассмотрим корректных начальных отрезков упорядочения.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Пусть дано множество X. Применим аксиому выбора к множеству $\{(x, A) \mid x \notin A \subsetneq X\}$. Мы получим функцию f, которая каждому подмножеству X (кроме всего X) сопоставляет элемент, не лежащий в нём.

Мы хотим задать полный порядок $\leqslant$ на X, такой что каждый элемент $x \in X$ будет образом множества всех строго меньших элементов, то есть $\forall x \in X : x = f(\{y \in X \mid y < x\})$.

Для доказательства мы рассмотрим корректных начальных отрезков упорядочения.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Мы хотим задать полный порядок $\leqslant$ на X, такой что каждый элемент $x \in X$ будет образом множества всех строго меньших элементов, то есть
$\forall x \in X : x = f(\{y \in X \mid y < x\})$.

Назовём это требованием перехода.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Корректным начальным отрезком назовём пару, содержащую подмножество X и полный порядок на нём, удовлетворяющий требованию перехода.

Индукцией по вполне упорядоченному множеству можно доказать, что из двух корректных начальных отрезков один является началом другого.

Будем считать, что функция f определена и на начальных отрезках X: $f((S, R)) = f(S)$.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Рассмотрим объединение всех возможных корректных начальных отрезков (выделим из множества $P(X) \times P(X \times X)$). Обозначим его за T.

Это корректный начальный отрезок.

Действительно, сравнение любых двух элементов все начальные отрезки задают одинаково. Свойства порядка можно проверять внутри любого начального отрезка, содержащего все нужные элементы. Если какое-то подмножество непусто, то возьмём какой-то элемент и какой-то начальный отрезок, содержащий этот элемент — у пересечения множества с таким начальным отрезком будет минимум.

Ликбез: теорема Цермело и аксиома выбора

Рассмотрим объединение всех возможных корректных начальных отрезков (выделим из множества $P(X) \times P(X \times X)$). Обозначим его за T.

Если бы этот начальный отрезок включал не все элементы, то можно было бы добавить $f(T)$ как наибольший элемент и получить больший корректный начальный отрезок.

Тогда у нас есть корректный начальный отрезок T, который включает все элементы X и задаёт полный порядок на множестве X.

Ликбез: лемма Цорна и аксиома выбора

Лемма Цорна:
Если всякое множество попарно сравнимых элементов в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M меньше некоторого максимального.

Мы докажем это, построив функцию из большого порядкового типа в множество M. Функция будет неубывающей и будет строго возрастать, пока в её образе не будет максимального элемента.

Можно вполне упорядочить множество $P(M)$, сопоставить ему порядковый тип α, после чего для заданного элемента $x_0 \in M$ построить рекурсивно функцию f из α в M. f будет задавать неубывающую последовательность.

Можно вполне упорядочить множество $P(M)$, сопоставить ему порядковый тип α, после чего для заданного элемента $x_0 \in M$ построить рекурсивно функцию f из α в M. f будет задавать неубывающую последовательность.

Выберем для каждого множества C поправно сравнимых элементов какую-то конкретную его верхнюю грань $b(C)$. Выберем для каждого немаксимального элемента $x \in M$ какой-то больший элемент $n(x) > x$. Для максимального элемента x мы определим $n(x) = x$.

$$f(0) = x_0$$

$$f(\alpha = \Cup_{\beta \in \alpha}) = n(b(\{f(\beta) \mid \beta \in \alpha\}))$$

$$f(S(\alpha)) = n(f(\alpha))$$

Ликбез: лемма Цорна и аксиома выбора

Построенная функция f неубывающая и её образ содержит x_0. Она не может быть вложением, так как α имеет мощность как у $P(M)$, что больше мощности M.

Но чтобы она не была вложением, нам надо, чтобы её образ включал элемент y, для которого $n(y) = y$, то есть какой-то максимальный элемент.

Мы построили максимальный элемент, больший либо равный x_0, что и требовалось.