Проблема слов и диаграммы Дена.

$X = \{a_1, \dots, a_n\}$ — набор обр.
$F(X)$ — свободная группа на $a_1, \dots, a_n$, т.е.
$w_1 = w_2$ в $F(X) \iff$ они отличаются вставкой/удалением слов

$$a_i a_i^{-1} \;/\; a_i^{-1} a_i$$

Пусть $R = \{R_1, \dots, R_k\}$ — набор слов в $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$

Вх $G = \langle X \mid R \rangle$ — задание соотн. R

$w_1 = w_2$ в $G \iff$ они отличаются

вставкой/удалением

$$a_i R_j a_i^{-1}, \quad a_i R_j^{-1} a_i^{-1}$$
$$a_i^{-1} R_j a_i, \quad a_i^{-1} R_j^{-1} a_i.$$

Всегда есть отобр. $F(X) \to G$, i.e.
если слова равны в $F(X)$, то они = в G

Лемма 1.

Слово $w = 1$ в $G \iff$

$w = (u_1^{-1} R_{i_1} u_1) \dots (u_n^{-1} R_{i_n} u_n)$ в $F(X)$

R_i – соотн.

u_i – произв. слова

"Наивный алгоритм"

w – заданное слово
перебираем

(*) $(u_1^{-1} R_{i_1} u_1) \dots (u_n^{-1} R_{i_n} u_n)$

сокращаем все подслова

$a_i a_i^{-1}$ и проверяем, совп. ли слово с w.

- если в некоторый момент мы получили совпадение, алгоритм останавливается и отвечает: „$w = 1$ в G"

- однако (*) счетно

Существуют группы, в которых проблема равенства $w = 1$ алгоритмически неразрешима.

§ Классические изопериметрические неравенства

$C \subset \mathbb{R}^2$ замкнутая кривая, ограничивающая область D.

Факт: если длина кривой фиксирована, то наибольшая площадь

Area(D) достигается, когда C – окружн.

$\forall$ кривой C $\quad \mathrm{Area}(D) \leq \ell^2/4\pi$

Теперь пусть C – замкнутая кривая в $\mathbb{H}^2$ длины ℓ, огранич.

$$\mathrm{Area}(D) \leq C \cdot \ell$$

Площадь слова, длина слова

Пусть $w = 1$ в $G = \langle X | R \rangle$

Опр. Area(w) – минимальное число $k \in \mathbb{N}$, т.ч. $w = (u_1^{-1} R_{i_1} u_1) \dots (u_k^{-1} R_{i_k} u_k)$ в $F(X)$

Опр. Диаграмма ван Кампена над группой $\langle X | R \rangle$

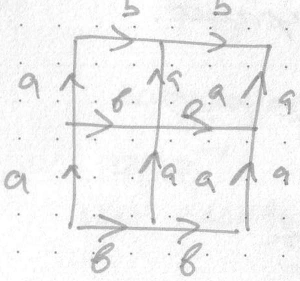
- область $M \subset \mathbb{R}^2$, разбитая на многоугольники
- ориентация на каждом ребре
- a_i на каждом ребре

7.7. если обойти вдоль границы $\forall$ многоугольника по кругу, и прочитать слово, α является одним из соотношений R

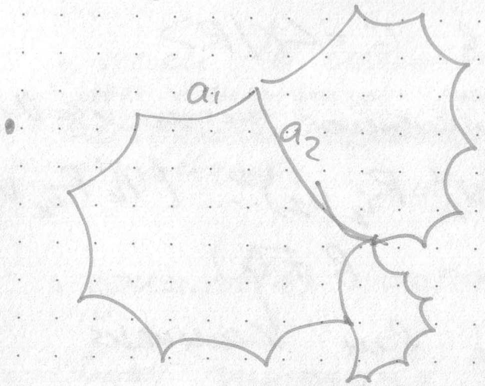
(с точностью до цикл. перест.)

Опр: граничное слово диагр. ван Кампена — слово, прочитанное при обходе границы M по кругу.

Пример: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$



$aabba^{-1}a^{-1}b^{-1}b^{-1}$



Лемма: Если w — граничное слово диаграммы ван Кампена, то в $F(X)$ имеет место

$$w = \prod_{j=1}^{k} (u_j^{-1} R_j u_j)$$

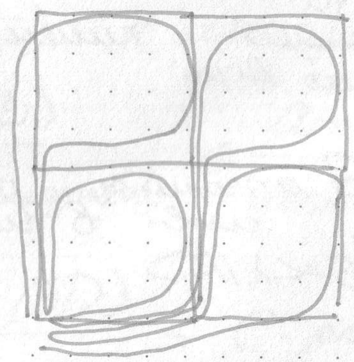
u_j — слова

R_j — соот.

$k = \#$ многоугольников в диаграмме

Пример: $aba^{-1}b^{-1} =: [a,b]$

$$w = (a[a,b]a^{-1}) \cdot ([a,b]) \cdot (ba[a,b](ba)^{-1}) \cdot (b[a,b]b^{-1})$$



...Лемма: ∃ диаграмма Дена над $G=\langle X|R\rangle$ с граничным словом w $\Longleftrightarrow$ $w=1$ в G

$$\mathrm{Area}(w)=\min\left\{\begin{array}{c}\text{кол-во многоуг. в}\\ \text{диаграмме в.к.}\\ \text{с граничным}\\ \text{словом } w\end{array}\right\}$$

...ер: (Функция Дена) (X,R)

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(l)=\max\left\{\mathrm{Area}(w):\ \begin{array}{c} w=1 \text{ в } G\\ \text{длина}(w)=l\end{array}\right\}$$

...пр: Группа $G=\langle X|R\rangle$ гиперболична

$\Updownarrow$

она имеет линейно растущую функцию Дена

...мма 4: ∃ алгоритм, распознающий тривиальность слов в гиперболической группе $G=\langle X|R\rangle$

...во: w.

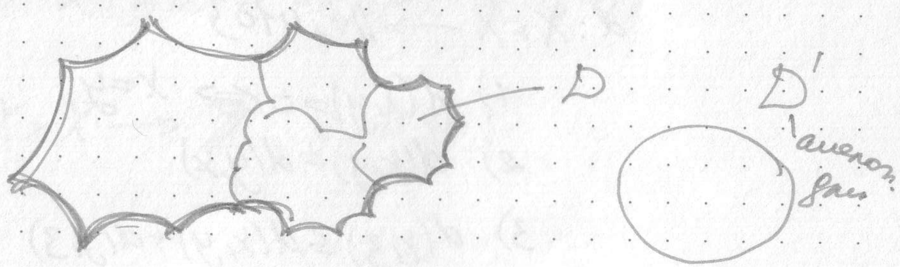
Если $w=1$, то $\mathrm{Area}(w)\le C\cdot l(w)$

∃ конечное число диагр-в.к. с количеством многоугольников $\le C\cdot l(w)$ и границей длины $l=l(w)$

Переберём все диаграммы и посмотрим, встречается ли w среди граничных слов

Замечание: алгоритм ∃ в ∀ группе, у $\propto$ функция Дена рекурсивно вычислима, т.е. её можно задать формулой

Лемма: $\pi_1\Sigma_2 = \langle a_1a_2a_3a_4 \mid a_1a_2a_3a_4a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}\rangle$ гиперболическая группа



$$\mathrm{Area}(w)=\#\,\text{многоугольников}=$$

$$=\frac{\mathrm{Area}(D)}{\mathrm{Area}(\text{многоуг})}\le\frac{\mathrm{Area}(D')}{\mathrm{Area}(\text{многоуг})}=$$

$$=\frac{C\cdot\text{длина}(\partial D)}{\mathrm{Area}(\text{мног})}\le C\cdot\text{длина слова}$$

Начала гиперболической теории групп.

Цель: изучение групп с точки зрения метрич. пр-в.

Напоминание:

(X,d) – метрическое пр-во

X – множество

$d: X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$

Опр: $G=\langle S|R\rangle$

$d_S(g,h) :=$ длина самого короткого слова, предст. $g^{-1}h$

Замечание: $d_S \sim S$

например, $S=G$, то

$d_S(g,h)=1 \quad g\neq h$

Д-во того что d_S - метрика

1) $d_S(g,h)=0 \Leftrightarrow g^{-1}h=e \Leftrightarrow g=h$
2) $d_S(g,h) \le d_S(h,g)$

$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ – слово миним. длины, предст. $g^{-1}h$

тогда $h^{-1}g$

$x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$

3) $d_S(g,h) \le d_S(g,y)+d_S(y,h)$

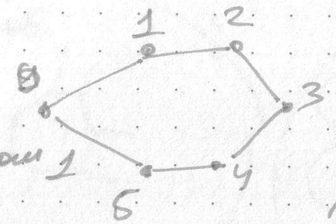
$d_S: X \times X \to \mathbb{Z}.\ \mathbb{N} \cup \{0\}$

Опр: Граф Кэли группы $G=\langle S|R\rangle$

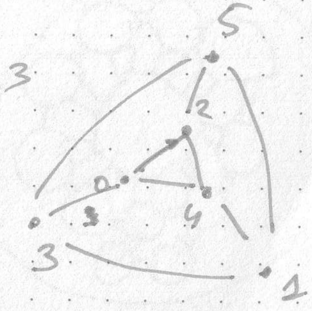
- вершины – это $g \in G$
- ребро между x и y $\Leftrightarrow$ $d_S(x,y)=1$

Примеры:

- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ с генератором 1

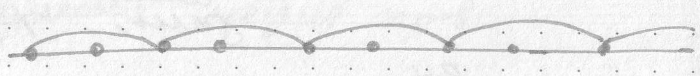


- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $\{2,3\}$ с генерато... 2 и 3

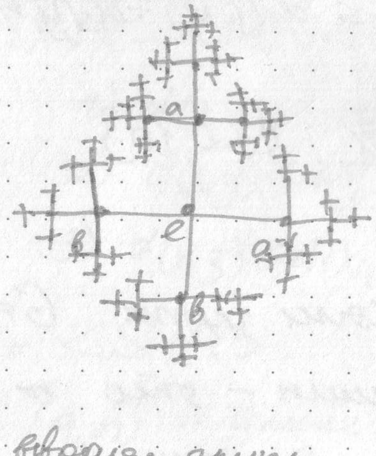


• $\mathbb{Z}$ $\{1\}$

• $\mathbb{Z}$ $\{1, 2\}$

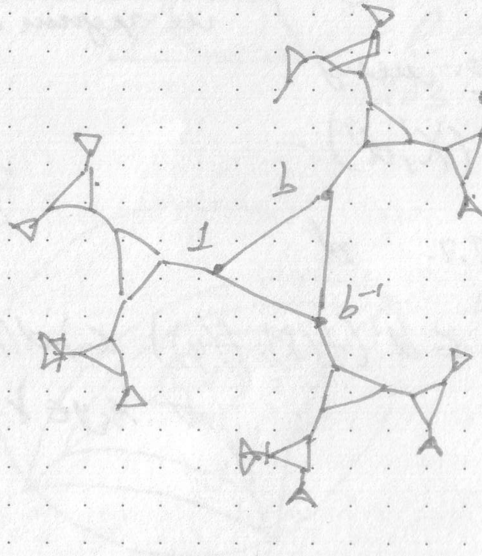


• $\mathbb{F} = \langle a, b \rangle / \cdot \rangle$



• $\mathbb{F}$ – вводим группы e и образующи-
ей Кэли – дерев.
граф

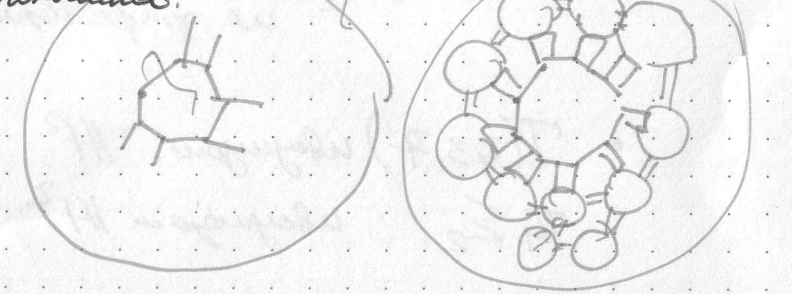
• $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$



• $T(2,3,7)$
группа сохр. ориентацию
изометрий замощения
$\mathbb{H}^2$ треугольниками $(\pi/2, \pi/3, \pi/7)$

можно показать, что граф Кэли-
это двойственное замощение $\mathbb{H}^2$

из 7 и 3угольников.



граф Кэли

• $\pi_1\Sigma_2$ — действует дискретно $\mathbb{H}^2$

Опр. (λ,k)- (или как смотреть на группы и графы)

Квазиизометрия между

∃ (X,d) и (X',d') —

$f: X\to X'$ т.ч. ∀

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y)-k \le d'(f(x),f(y)) \le \lambda\cdot d(x,y)+k \quad \forall\, x,y\in X$$

Примеры:

• $(\mathbb{Z},d)$, $(\mathbb{R},d)$

• ограниченное метрическое пр-во квазиизометрично точке

• S, T - два генерирующих множества, то они квазиизом. (G,d_S), (G,d_T)

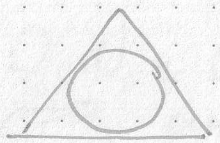
• группа квазиизометрична графу Кэли (с естественной метрикой на графе Кэли)

• $\pi(2,3,7)$ квазиизом. $\mathbb{H}^2$

$\pi_1\Sigma_2$ квазиизом. $\mathbb{H}^2$

Тонкие треугольники:

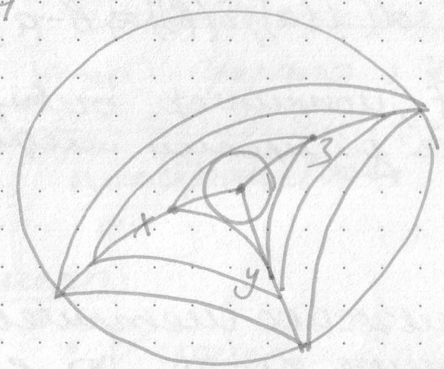
• $\mathbb{R}^2$



длина сторон — l

$$\frac{l}{2\sqrt{3}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$$

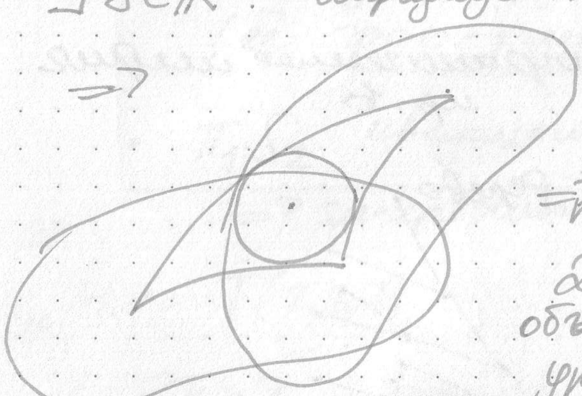
• $\mathbb{H}^2$



инрадиус $\not\xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$

∃ $\delta\in\mathbb{R}$: инрадиус ∀ треугольника $\le\delta$

⇒



Гео Опр:

каждая сторона треугольника ∈ 2δ окрестности объединения двух других сторон

Геодезический отрезок:

$i:[0,\ell] \to X$

$\uparrow$ изометрия

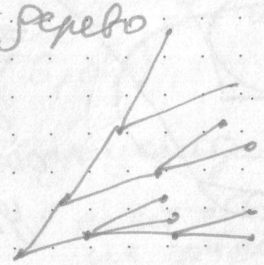
$$d(i(a), i(b)) = b-a$$

не всегда $\exists$, например очевидно в группе с дискретной метрикой.

Опр: Гиперболическое метрическое пр-во — такое пр-во, что все Δ δ-тонкие

Пример: • ограниченное метрич. пр-во

• $\forall$ дерево



• $\mathbb{H}^2$

• $\mathbb{H}^n$, $\forall$ треугольник $\in \mathbb{H}^2$

• $\mathbb{R}^n$ — не гиперболическое

Лемма: (X,d) и (X',d') квазиизом. $\Longleftrightarrow$ они или одновременно гиперболичны, или нет.

Опр: Гиперболическая группа — это группа, граф Кэли которой α гиперболическим метрическим пространством

Примеры:

• $\forall$ конечная группа гиперболична

• $\forall$ свободная группа гиперболична (её граф — дерево)

• $\pi_1 S_2$ квазиизометрична $\mathbb{H}^2$ $\Rightarrow$ гиперболична

• $T(2,3,7)$

• $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ квазиизом. $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ не гиперболична