Теорема о 4-красках, шестимерные многообразия и комбинаторика фуллеренов

Лекция 2. Квазиторические многообразия фуллеренов и проблема классификации 6-мерных многообразий

В. М. Бухштабер

МИАН имени В. А. Стеклова,
МГУ имени М. В. Ломоносова,
ИППИ имени А. А. Харкевича

XVI Летняя школа «Современная математика»
Ратмино, июль 2016 г.

В 1962 году Сергей Петрович Новиков поставил и решил для односвязных многообразий размерности больше 4 фундаментальную проблему:

Какими инвариантами определяется свойство двух гладких ориентированных многообразий быть диффеоморфными друг другу?

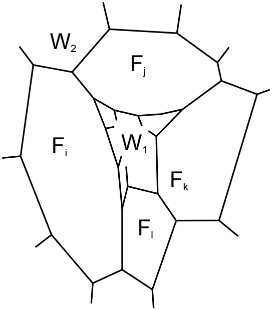
- Первая публикация — С. П. Новиков, “О диффеоморфизме односвязных многообразий”, ДАН СССР, 143:5 (1962), 1046–1049;
- Подробное изложение — С. П. Новиков, “Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия. I”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 365–474.

В работах С. П. Новикова специально обсуждаются случаи размерностей 6 и 7. В последующих работах ряда авторов случай размерности 6 был разобран полностью.

Фуллерены дали большой класс гладких односвязных 6-мерных многообразий, специфика которого позволила получить для этого класса существенно более сильные результаты.

Этим результатам и посвящена в основном лекция II.

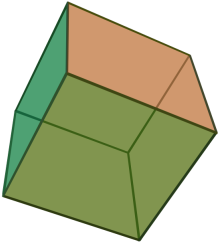
Let P be a simple convex 3-polytope. A *k-belt* is a cyclic sequence $(F_{j_1}, \dots, F_{j_k})$ of 2-faces, such that $F_{i_{j_1}} \cap \dots \cap F_{i_{j_r}} \neq \varnothing$ if and only if $\{i_1, \dots, i_r\} \in \{\{1,2\}, \dots, \{k-1, k\}, \{k, 1\}\}$.



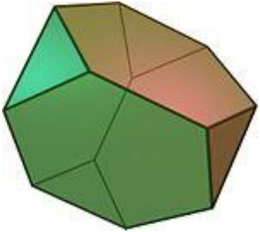
4-belt of a simple 3-polytope.

Flag polytopes

A simple polytope is called flag if any set of pairwise intersecting facets $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$: $F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, $s, t = 1, \ldots, k$, has a nonempty intersection $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$.

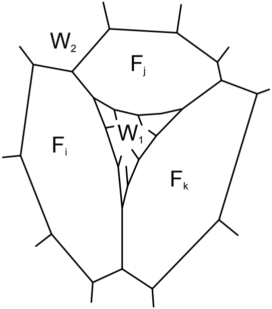


Flag polytope



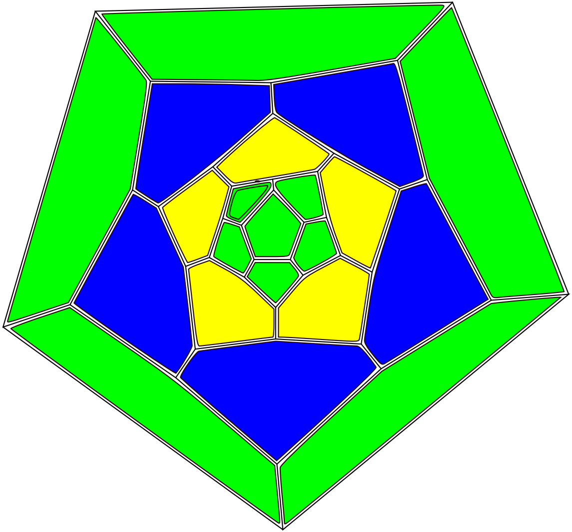
Non-flag polytope

A simple 3-polytope P is not flag if and only if either $P = \Delta^3$, or P contains a 3-belt.



If we remove the 3-belt from the surface of a polytope, we obtain two parts W_1 and W_2, homeomorphic to disks.

Fullerene with 2 hexagonal 5-belts



Stanley–Reisner ring of a simple polytope

Let $\{F_1, \ldots, F_m\}$ be the set of facets of a simple polytope P. Then a Stanley-Reisner ring of P over $\mathbb{Z}$ is defined as

$$\mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/J_{SR}(P).$$

Here $J_{SR}(P) = (v_{i_1} \ldots v_{i_k},$ where $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \varnothing)$ is the Stanley-Reisner ideal.

- $\mathbb{Z}[\Delta^2] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/(v_1 v_2 v_3)$

Theorem

The Stanley-Reisner ring of a flag polytope is quadratic:

$$J_{SR}(P) = \{v_i v_j : F_i \cap F_j = \varnothing\}.$$

Stanley-Reisner ring of a simple polytope

Theorem (W. Bruns, J. Gubeladze, 1996)

Two polytopes are combinatorially equivalent if and only if their Stanley-Reisner rings are isomorphic.

Corollary

Fullerenes P_1 *and* P_2 *are combinatorially equivalent if and only if there is an isomorphism* $SR(P_1) \cong SR(P_2)$

Cohomology ring of a moment-angle manifold

Let

$$R^*(P) = \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[P]/(u_i v_i, v_i^2)$$

Theorem (V.Buchstaber, T.Panov, 1998)

There is a multigraded ring isomorphism

$$H^*(\mathcal{Z}_P; \mathbb{Z}) = H[R^*(P), d]$$

where
$du_i = v_i,\ dv_i = 0,\ \mathrm{mdeg}\, u_i = (-1, 2\{i\}),\ \mathrm{mdeg}\, v_i = (0, 2\{i\}).$

B-rigidity

Definition (V.Buchstaber, 2006)

A simple polytope P is said to be B-rigid if the following condition holds:
Let P' be another simple polytope such that there is
a graded ring isomorphism

$$H^*(\mathcal{Z}_P;\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathcal{Z}_{P'};\mathbb{Z}).$$

Then P' is combinatorial equivalent to P.

B-rigidity of fullerenes

Theorem (V.Buchstaber, N.Erokhovets, 2015)

Any fullerene is flag and has not 4-belt.

Theorem (F.Fan, J.Ma, X.Wang, 2015)

Any flag simple politope without 4-belt is B-rigid.

Corollary

Every fullerene is B-rigid.

Cohomology ring of the quasitoric manifold $M(P,\Lambda)$

Theorem (Davis-Janiszkiewicz)

We have $H^*(M(P,\Lambda)) = \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/(J_{SR}(P)+I_{P,\Lambda})$, *where* $J_{SR}(P)$ *is the Stanley-Reisner ideal generated by monomials* $\{v_{i_1}\dots v_{i_k} : F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\varnothing\}$, *and* $I_{P,\Lambda}$ *is the ideal generated by the linear forms* $\lambda_{i,1}v_1+\dots+\lambda_{i,m}v_m$ *arising from the equality*

$$\ell(F_1)v_1+\dots+\ell(F_m)v_m=0.$$

Corollary

- *If* $\Lambda=(I_n,\Lambda_*)$, *then*

$$H^2(M^{2n})=\mathbb{Z}^{m-n}$$

  with the generators $v_{n+1},\dots,v_m$.
- *The abelian group* $H^*(M(P,\Lambda))$ *has no torsion.*

В случае $P = \triangle^3$ с характеристическим отображением

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_4\} \to \mathbb{Z}^3,$$

где $\ell(F_k) = e_k,\ k = 1, 2, 3$ и $\ell(F_4) = -(e_1 + e_2 + e_3)$, идеал $J_{SR}(P)$ порождается элементом $v_1 v_2 v_3 v_4$, а идеал $I_{P,\Lambda}$ порождается элементами согласно уравнению

$$v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = v_4(e_1 + e_2 + e_3),$$

т.е. элементами $v_k - v_4,\ k = 1, 2, 3$.
Следовательно,

$$H^*(M(\triangle^3, \Lambda)) = Z[v]/v^4.$$

Это согласуется с диффеоморфизмом $M(\triangle^3, \Lambda) \to \mathbb{C}P^3$.

Геометрическая реализация циклов квазиторического многообразия

Фундаментальные понятия современной алгебраической топологии были введены в знаменитой работе А.Пуанкаре (1895г.). Среди них — циклы и гомологии. Термин «гомологии» пришел из химии и принадлежит Э. Бетти, именем которого А. Пуанкаре назвал ранги групп гомологий.

Квазиторические многообразия $M(P, \Lambda)$ определены для любого n-мерного простого многогранника P, обладающего характеристическим отображением

$$\ell\colon \{F_1, \dots, F_m\} \to \mathbb{Z}^n.$$

Они дают широкий класс $2n$-мерных многообразий, у которых циклы и их пересечения имеют явную геометрическую реализацию.

Понятие кольца когомологий появилось только в 1930-х годах и принадлежит А. Н. Колмогорову и Дж. Александеру.

Теорема

Группа гомологий $H_{2n-2}(M(P,\Lambda),\mathbb{Z})$ квазиторического многообразия $M(P,\Lambda)$ размерности $2n$ порождена квазиторическими многообразиями $M_i^{2n-2}(P,\Lambda)$ гиперграней $F_i, i = 1, ..., m$.

Вложение многообразий $M_i(P,\Lambda) \subset M(P,\Lambda)$ дает геометрическую реализацию цикла, двойственного по Пуанкаре классу когомологий $v_i \in H^2(M(P,\Lambda),\mathbb{Z})$.

Для каждого k группа гомологий $H_{2k}(M(P,\Lambda),\mathbb{Z})$ порождена вложенными квазиторическими многообразиями, соответствующими $(n-k)$-мерным граням $F_{i_1}\cap \ldots \cap F_{i_{n-k}}$ многогранника P.

Эти многообразия представляют собой полные пересечения многообразий $M_{i_1}^{2n-2}(P,\Lambda), \ldots, M_{i_{n-k}}^{2n-2}(P,\Lambda)$.

Quasitoric manifold $M(P, \Lambda)$ has the canonical stable-complex structure with the total Chern class

$$C(M(P, \Lambda)) = 1 + c_1 + \cdots + c_n = (1 + v_1) \ldots (1 + v_m),$$

and the total Pontryagin class

$$P(M(P, \Lambda)) = 1 + p_1 + \cdots + p_{[\frac{n}{2}]} = (1 + v_1^2) \ldots (1 + v_m^2).$$

Definition (M.Masuda, D.Y.Suh, 2008)

Let P be a simple convex polytope admitting at least one characteristic function. Then P is said to be cohomologically rigid (or C-rigid) if for any quasitoric manifold $M(P, \Lambda)$, and any other quasitoric manifold $M' = M(P', \Lambda')$ over a simple convex polytope P' a graded ring isomorphism

$$H^*(M) \cong H^*(M').$$

implies a combinatorial equivalence of P' and P.

C-жесткость и B-жесткость

Теорема (S. Choi, T. Panov, D. Y. Suh)

Пусть комбинаторные данные (P, Λ) и (P', Λ') таковы, что существует изоморфизм градуированных колец

$$H^*(M(P, \Lambda) \to H^*(M(P', \Lambda').$$

Тогда существует изоморфизм градуированных колец

$$H^*(\mathbb{Z}_p) \to H^*(\mathbb{Z}_{p'}).$$

Следствие

Пусть трехмерный многогранник P является B-жестким. Тогда он является и C-жестким.

Следствие

Каждый фуллерен P является C-жестким.

Let P be a flag 3-polytope without 4-belts, M be some quasitoric manifold over P, and $v_1, \dots, v_m$ be the chosen canonical elements generating $H^2(M)$.
Let P' be some other 3-polytope, M' some quasitoric manifold over P', and $v'_1, \dots, v'_{m'}$ the corresponding elements.

C-rigidity

If there is a graded ring isomorphism

$$\varphi\colon H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(M'),$$

then $m = m'$ and P is combinatorially equivalent to P'.

Theorem

We have $\varphi(v_i) = \pm v'_{\sigma(i)}$ for some permutation $\sigma\colon [m] \to [m]$.

Corollary

We have $\varphi(w_2(M)) = w_2(M')$ and $\varphi(p_1(M)) = p_1(M')$.

Theorem

The permutation $\sigma\colon [m] \to [m]$ above has the following remarkable properties

- It defines a combinatorial equivalence $P \to P'$.
- For characterictic functions we have: $\Lambda' = A \cdot \Lambda \cdot B$, where $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$, and B is the matrix of the mapping $e_i \to \pm e_{\sigma(i)}$ for the standard basis $e_1, \ldots, e_m$ of $\mathbb{Z}^m$, and the signs are the same as $\varphi(v_i) = \pm v'_{\sigma(i)}$.

Let P be a flag simple 3-polytope without 4-belts (for example, a fullerene) and M be a quasitoric manifold over it.

Let P' be some other simple 3-polytope and M' be a quasitoric manifold over it.

Corollary

There is

- *an automorphism* $\psi\colon T^3 \to T^3$;
- *a diffeomorphism* $f\colon M \to M'$;

such that $f(tx) = \psi(t)f(x)$ *for any* $t \in T^3$, $x \in M$

if and only if

there is a graded ring isomorphism

$$H^*(M) \simeq H^*(M').$$

Let M be a closed oriented simply connected 6-dim manifold with

$$H^3(M;\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Torsion}\, H^*(M;\mathbb{Z}) = 0.$$

We have:
1. a free abelian group $H^2(M)$;
2. a cubical form $\mu\colon H^2(M) \to \mathbb{Z} \ : \ \mu(x) = \langle x^3, [M]\rangle$;
3. a linear form $p\colon H^2(M) \to \mathbb{Z} \ : \ p(x) = \langle p_1(M)x, [M]\rangle$, where $p_1(M)$ is the first Pontrygin class;
4. an element $w = w_2 \in H^2(M) \otimes \mathbb{Z}/2$, where $w_2(M)$ is Stieffel–Whitney class.

Classification of 6-dim manifolds

Theorem (C.T.C.Wall, P.Jupp, A.Zhubr)

There exists an oriented diffeomorphism $f\colon M' \to M$ iff there is an isomorphism
$$\varphi\colon H^2(M) \to H^2(M')$$
such that
$$\mu' \cdot \varphi = \mu,$$
$$p' \cdot \varphi = p,$$
$$\varphi(w_2(M)) = w_2(M').$$

Using our results about invariance of characteristic classes above we obtain another prove of the following result based on the classification of 6-dimensional simply connected manifolds.

Theorem

Let P be a simple flag 3-polytope without 4-belts and Q be a simple 3-polytope. Then manifolds $M^6(P,\Lambda_P)$ and $M^6(Q,\Lambda_Q)$ are diffeomorphic if and only if there is a graded ring isomorphism

$$H^*(M^6(P,\Lambda_P),\mathbb{Z}) \simeq H^*(M^6(Q,\Lambda_Q),\mathbb{Z}).$$

References I

- V. M. Buchstaber, *Lectures on Toric Topology.*, KAIST, Trends in Math., V. 10, N. 1, 2008, 1–64.
- M. Masuda, D. Y. Suh, *Classification problems on toric manifolds via topology.*, Contemporary Math., 460, AMS, Providence, RI, 2008.
- S. Choi, T. E. Panov, D. Y. Suh, *Toric cohomological rigidity of simple convex polytopes.*, Journal of the London Mathematical Society, 82:2, 2010, 343–360.
- S. Choi, M. Masuda, D. Y. Suh, *Rigidity problems in toric topology, A Survey.*, arXiv:1102.1359 v2 [math.AT] 21 Jun 2011.
- V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology.*, Math. Surveys and Monographs, v. 204, AMS, Providence, RI, 2015; 518 pp.

References II

- V. M. Buchstaber, *Toric Topology and Fullerenes.*, Lectures during the program on Combinatorial and Toric Homotopy (1–31 August 2015), Instute for Mathematical Sciences and the Department of Mathematics of National University of Singapore.
- F. Fan, X. Wang, *Cohomology rings of moment-angle complexes.*, arXiv:1508.00159 v1 [math.AT] 1 Aug 2015.
- V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, *Construction of Fullerenes.*, arXiv: 1510.02948 v1 [math.CO] 10 Oct 2015.
- F. Fan, J. Ma, X. Wang, *B-Rigidity of flag 2-spheres without 4-belt.*, arXiv:1511.03624 v1 [math.AT] 11 Nov 2015.

References III

- C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds.*, Inventiones mathematicae, 2(4), 1966, 355–374.
- P. Jupp, *Classification of certain 6-manifolds.*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philisophicl Society, 1973, 293–300.
- A. Zhubr, *Closed simply connected six-dimensional manifolds: proof of classification theorems.*, Algebra i Analiz, 12(4), 2000, 126–230.