Модулярные формы К. Конрад

Дубна, 2016 г. Листок 1

Тексты на диске O: $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

1. Пусть $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ задана формулой $f(z) = z|z|$.

   а) Если $z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbf{R}$), то докажите, что

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = x\frac{z}{|z|} + |z|,$$
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbf{R}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = -iy\frac{z}{|z|} + |z|,$$

   поэтому f не дифференцируема в точке z.

   б) Докажите, что $f'(0) = 0$: $\lim\limits_{h\to 0} f(h)/h = 0$.

2. (Действие дробно-линейными преорбазованиями)

   а) Для $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ такие, что $ad - bc \neq 0$ и $z \in \mathbf{C}$ ($z \neq -d/c$), докажите, что

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2}.$$

   б) Докажите, что формула

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

   определяет (левое) действие группы $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ на $H = \{x + iy : y > 0\}$. То есть, (i) $(a\tau + b)/(c\tau + d) \in H$, (ii) $I_2\tau = \tau$, где $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, и (iii) $A(B\tau) = (AB)\tau$ для всех $A, B \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ и $\tau \in H$.

   в) Для $k \in \mathbf{Z}$, матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$, и функции $f\colon H \to \mathbf{C}$, пусть $f|_k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\colon H \to \mathbf{C}$ формулой

$$\left(f|_k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(\tau) = f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-k},$$

   Докажите, что эта формула является (правым) действием группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ на функциях: (i) $f|_k I_2 = f$, где $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, и (ii) $(f|_k A)|_k B = f|_k(AB)$.

г) Используете пункт (в) чтобы доказать, что условие модулярности для функции $f\colon H \to \mathbf{C}$ эквивалентно тому, что $f(\tau+1) = f(\tau)$ и $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$ для всех $\tau \in H$.

3. Прочитайте файл о группе $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, в частности, что $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ порождена матрицами $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. То есть, всякую матрицу в $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ можно записать в виде произведения степеней этих матриц (возможно, что некоторые показатели — отрицательные).

   а) Найдите представление матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ прозиведением степеней матриц S и T.

   б) Покажите, что $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ порождена и матрицами $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

   в) Пусть $f\colon H \to \mathbf{C}$ удовлетворяет условию модулярности. Если у f есть вес 4, то докажите, что $f(\omega) = 0$, где $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ кубический корень из единицы в H. Если у f есть вес 6, то докажите, что $f(i) = 0$.