Модулярные формы К. Конрад

Дубна, 2016 г. Листок 3

Текст на диске O: Rationality of q-expansions coefficients

1. Докажите, что $E_k(\tau) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{(m,n)=1} \dfrac{1}{(m\tau+n)^k}$, где сумма берется по всем парам взаимно простых целых (может быть, они меньше 0).

2. Напишите ряд Эйзенштейна E_{18} как линейную комбинацию E_6^3 и $E_4^3 E_6$.

3. Для четного $k \geq 4$, пусть $N_k = \{(a,b) : a \geq 0, b \geq 0, 4a + 6b = k\}$.

   а) Докажите, что $|N_k| = \dim M_k$.

   б) Докажите, что $\{E_4^a E_6^b : a \geq 0, b \geq 0, 4a + 6b = k\}$ линейно независимое множество в M_k, поэтому они базис из-за пункта (а). (Подсказка: Если $\sum_{a,b} c_{ab} E_4^a E_6^b = 0$ и есть член, где $b = 0$, то пусть $\tau = i$ чтобы видеть, что коэффициент этого члена равен 0. Поэтому после деления на E_6 получается похожее линейное соотношение в весе $k - 6$.)

4. Для четного $k \geq 4$, покажите, что у M_k есть базис $\{E_4^a \Delta^b : a \geq 0, b \geq 0, 4a + 12b = k\}$, если $k \equiv 0 \bmod 4$ и $\{E_6 E_4^a \Delta^b : a \geq 0, b \geq 0, 4a + 12b = k - 6\}$, если $k \equiv 2 \bmod 4$.

5. Отношение E_6/E_4 удовлетворяет условию модулярности в весе 2 и ограничено при $\tau \to i\infty$ (на самом деле, величина стремится к 1). Почему это не противоречит тому, что $M_2 = \{0\}$?

6. Если $f \in M_k$ и $g \in M_\ell$, то докажите, что $\ell f' g - k f g' \in M_{k+\ell+2}$, где штрих обозначает дифференцирование по τ.

7. Если $f \in M_k$ не обнуляется на H, то докажите, что $12 \mid k$ и f равна $\Delta^{k/12}$ с точностью до умножения на константу.

8. Докажите скрученную формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{\text{неч. } n \in \mathbf{Z}} (-1)^{(n-1)/2} h(n) = \frac{i}{2} \sum_{\text{неч. } n \in \mathbf{Z}} (-1)^{(n-1)/2} \widehat{h}\left(\frac{n}{4}\right),$$

где обе суммы берутся по всем нечетным целым. (Подсказка: напишите $\sum_{\text{неч. } n}(-1)^{(n-1)/2}h(n) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} h(4m+1) - \sum_{m\in\mathbf{Z}} h(4m-1)$ и примените формулу суммирования Пуассона к функциям $h(4x+1)$ и $h(4x-1)$, преобразования Фурье которых были на втором листке (упр. 3, когда $a = 4, b = \pm 1$).

9. Пусть $\theta(\tau) = \sum_{\text{неч. } n\geq 1}(-1)^{(n-1)/2} n e^{\pi i n^2 \tau/4}$. Проверьте, что $\theta(\tau+1) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\theta(\tau)$.