Кубические формы

Сергей Галкин, Никон Курносов

Первая лекция курса посвящена кубическим формам от двух переменных, затем во второй лекции мы переходим к изучению плоских кубик и на третьей-четвёртой – кубических поверхностей.

1 Кубические формы от двух переменных

Определение 1.1 *Кубической формой $F(x_1, ..., x_n)$ называется однородный многочлен степени три от n переменных.*

Замечание 1.2 *Понятно, что можно рассматривать не только кубические формы, а, например, квадратичные и другие.*

Нас будут интересовать свойства подобных форм, а также геометрия, определяемых ими "многообразий заданных соотношением $F(x_1, ..., x_n) = 0$.

Если в определении 1.1 $n = 2$, то такая форма называется **бинарной кубической формой**. Именно с их изучения мы и начнём наш рассказ.

Рассмотрим кубическую форму от двух переменных

$$c(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \tag{1}$$

Четырёхмерное пространство таких форм можно отождествить с $\mathbb{R}^4$, используя коэффициенты a, b, c, d как координаты.

1.0.1 Классификация бинарных квадратичных форм

1. Всегда можно изменить знак на противоположный, сделав замену $(u, v) = (-x, -y)$.

Определение 1.3 *Корневым множеством формы c называется множество*

$$R_c := (x, y)|ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$$

Замечание 1.4 *Заметим, что если $(x, y) \in R_c$, то $(\lambda x, \lambda y) \in R_c$ для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

Из замечания 1.4 следует, что для любой формы c корневое множество состоит из прямых, проходящих через начало координат (очевидно, что $(0,0) \in R_c$).

2. Чтобы понять расположение этих прямых, будем искать их пересечения с прямой $x = 1$.

При этом ось y не пересекает этой прямой, её можно рассматривать раньше. Забегая вперёд, мы можем считать, что ей соответствует бесконечно удалённая точка.

Приняв $x = 1$, мы получим кубическое уравнение относительно y:

$$P_c(y) = a + by + cy^2 + dy^3 = 0.$$

Если $c \neq (0,0,0,0)$, то уравнение выше имеет не более трёх решений y_1, y_2, y_3.

Замечание 1.5 *Прямая y задаётся уравнением $x = 0$, при этом она является подмножеством корневого семейства, если и только если $d = 0$. В этом случае уравнение $P_c(y) = 0$ сводится к квадратному и имеет не более двух решений.*

Таким образом для трёх прямых, как несложно видеть:

Теорема 1.6 *Корневое семейство R_c кубики c может относиться к одному из пяти типов*

(1) три различные прямые,

(2) одна некратная прямая,

(3) три прямые, две из которых совпадают между собой,

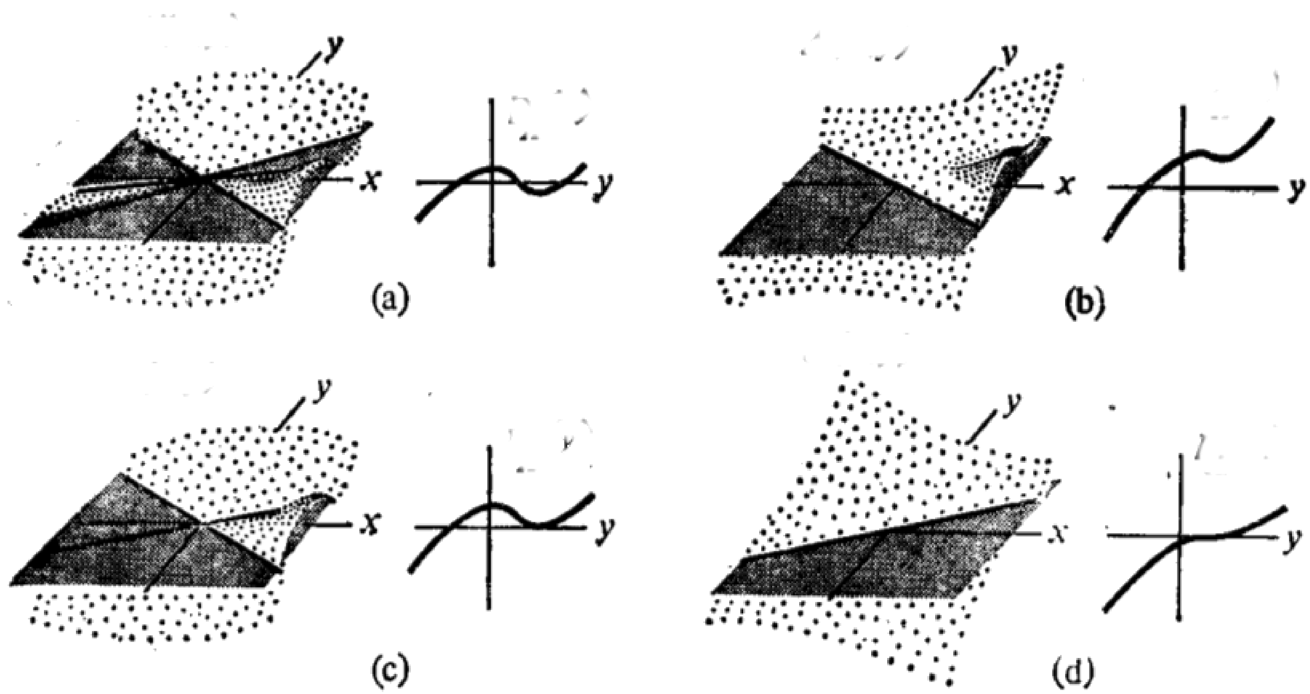
(4) три совпадающие прямые,

(5) вся плоскость.

Ненулевую кубическую форму можно привести к одному из стандартных типов с помощью замены координат:

$$x^2y - y^3, \quad x^2y + y^3, \quad x^2y, \quad x^3.$$

Первые четыре случая проиллюстрированы на рисунке ниже



Из книги Т.Постон, И.Стюарт, Теория катастроф и её приложения.

Доказательство:

Наиболее прост последний случай, он соответствует кубике $c = (0, 0, 0, 0)$.

Во-первых заметим, что замены координат не изменяют числа корневых прямых.

Лемма 1.7 *Для любых двух кубик f, g, принадлежащих одному типу, существует линейная замена координат, такая что в новых координатах форма f имеет такое же выражение, что и форма g.*

Случай (2) отличается от случая (4) тем, что в случае (4) градиент функции обращается в ноль на целой прямой, а в случае (2) – только в начале координат.

Рассмотрим теперь случай (1). Как легко заметить, всегда существует параллелограмм, такой, что две его стороны идут по двум из корневых прямых, а диагональ – по третьей. Выберем систему координат так, чтобы первая координата u шла по первой стороне, вторая v – по второй.

В новых координатах уравнения корневых прямых имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0, \quad u - v = 0$$

Таким образом, меняя масштаб, можно получить, что $\ = uv(u - v)$.

Во всех остальных случаях, кроме (5), у нас есть по крайней мере одна корневая прямая, значит, мы можем выделить линейный множитель

$$(x, y) = (lx + my)(ax^2 + bxy + cy^2).$$

Используя задачу 1 из листочков, мы можем сделать замену координат, в которых квадратичный сомножитель упроститься и примет одну из канонических форм. Линейный сомножитель при этом останется линейным и будет иметь вид $Lu + Mv$.

Таким образом, мы можем представить c в одном из следующих видов

a) $(Lu + Mv)(u^2 - v^2)$,

b) $(Lu + Mv)(u^2)$,

c) $(Lu + Mv)(u^2 + v^2)$.

Замечание 1.8 *В классификации квадратичных форм важную роль играет знак. Например, $-u^2$ и u^2 относятся к разным типам. В рассуждении выше, мы этот знак также отправили в линейную часть.*

Рассмотрим отдельно случай a). Разложив квадратичный множитель на два линейных, получаем, что $c(u, v) = (Lu + Mv)(u - v)(u + v)$.

Если $(Lu + Mv)$ не кратно $u - v$ или $u + v$, тогда мы имеем рассмотренный выше случай (1) для трёх прямых. В противном случае, либо M равно $L = c$, либо $-M$. Сделаем замену координат $U = (u \pm v)c^{-1/2}, V = vc^{-1/2}$. Таким образом, c делится на U^2 и получаем случай b).

Разберём теперь случай b). Если $M \neq 0$, то введём координаты $U = Lu + Mv, V = v$ и наша форма принимает вид UV^2. Если $M = 0$, то заменой $U = L^{1/2}u, V = v$ приводим форму к виду U^3.

В случае c) мы подходящими заменами приведём форму c к виду $(U^2+V^2)V$.

Как итог, ненулевую кубическую форму можно привести к одному из стандартных типов:

$$UV(U - V), \quad (U^2 + V^2)V, \quad U^2V, \quad U^3.$$

Заменим, U, V на x, y и, сделав замену $x = 1/2(U + V), y = 1/2(U - V)$ в первом типе, получим искомую классификацию.

□

Омбилический браслет

Возникает вопрос – как эти кубики расположены в четырёхмерном пространстве кубических форм.

Пример 1.1 *Для бинарных квадратичных форм $ax^2 + bxy + cy^2$ – мы имеем двойной конус $b^2 = ac$. Учитывая возможность умножения на константу, мы можем взять единичную сферу $a^2+b^2+c^2 = 1$, взять на ней две окружности, заданные условием $b^2 = ac$. Построив под ними два конуса с вершиной в нуле, мы получим так называемый дискриминантный конус.*

Посмотрим, как такая конструкция реализуется для кубических форм. Аналогично случаю квадрик, мы можем рассмотреть сферу $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ и построить конус с вершиной в $(0, 0, 0, 0)$.

Замечание 1.9 *Используя тот факт, что все прямые проходят через ноль мы можем рассматривать единичную сферу (как выше). Но в случае кубических форм мы также можем умножать на -1, тем самым рассмотрев антиподальное отображение для сферы – мы можем перейти к проективному пространству. Тем не менее, с точки зрения визуализации удобно рассматривать трёхмерную сферу.*

Напомним, что треугольной гипоциклоидой $\mathcal{G}$ называется геометрическое место точек для отмеченной точки на окружности радиуса 1, которая катится, касаясь внутренне, по окружности радиуса 3.

Теорема 1.10 *Индуцированное разбиение трёхмерной сферы имеет форму браслета $S^1 \times \mathcal{G}$, сечением которого является треугольная гипоциклоида, а за один оборот по окружности гипоциклоида поворачивается на 1/3 своего оборота. При этом кубики типа (1) лежат внутри, типа (2) – снаружи, типа (3) – на гладкой поверхности браслета, типа (4) – на ребре.*

Доказательство:

Сделаем набросок доказательства этого утверждения.

Шаг 1. Группа $S^1 = SO(2)$ (повороты)

Шаг 2.

Лемма 1.11 *Общая вещественная кубическая форма имеет вид $r = Re(\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z})$, где α, β – комплексные коэффициенты.*

Доказательство леммы следует из того, что, подставив $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$, мы получим, что в форме r коэффициенты при мономах выражаются с помощью *невырожденной* матрицы.

Замечание 1.12 *Строго говоря, мы не говорили ни о матрицах, ни о невырожденности до этого, тем не менее интуитивно понятно, что означает невырожденность линейного преобразования координат.*

Обозначим через A плоскость $\beta = 0$, через B плоскость $\alpha = 0$, в обеих плоскостях рассмотрим также окружности A_0, B_0, заданные соотношением $|\alpha| = 1$ и $|\beta| = 1$ соответственно.

Шаг 3. Окружность S^1 действует на произведении $A \times B$, как $(e^{3i\phi}, e^{i\phi})$

Лемма 1.13 *На окружности A_0 кубические формы имеют тип (1), на окружности B_0 – тип (2).*

Это очевидно, так как A_0 содержит точку (1,0), а B_0 – точку (0,1).
Шаг 4.

Лемма 1.14 *Браслет пересекается с плоскостью $\alpha = 1$ по треугольной гипоциклоиде $\beta = 2e^{i\phi} + e^{-2i\phi}$, где $\phi \in [0, 2\pi)$.*

*Доказательство:*Если точка $(1, \beta)$ принадлежит браслету, то форма $r = Re(z^3 + \beta z^2\bar{z}$ имеет двойную точку в $x : y$. Применяем условие на производную, получаем $\beta = 2e^{i\phi} + e^{-2i\phi}$. □

Геометрически это та самая гипоциклоида, о который мы уже говорили. Её геометрическая интерпретация есть в задачках.

Шаг 5. Рассмотрим полноторий $A_0 \times B$. По лемме 1.13 браслет не пересекается с B_0, а значит естесственная проекция (радиальная проекция из центра) отображает $S^3 \setminus B_0$ в $A_0 \times B$, и соответственно можно рассматривать браслет в полнотории.

Шаг 6. Кубики типа (4) пересекаются с плоскостью $\alpha = 1$ по трём точкам, типа "каспа".

Если имеется корень кратности три, то зануляется и первая и вторая проивзодные нашей формы. Тем самым мы получаем $\beta = 3, 3w, 3w^2$, где w – корень третьей степени из 1.

Шаг 7. Возьмём повороты не более, чем на треть ($\phi \in [0, 2\pi/3)$). При этом по шагу 3 A_0 сделает один оборот, B на треть-оборота. Тем самым плоскость $\alpha = 1$ при проходе по полноторию возвращается в себя, сделав треть оборота. По лемме 1.14 то же самое происходит и с гипоциклоидой, так мы и получаем браслет. При этом кубики типа (3) и (4) находятся на границе по лемме 1.14 и предыдущему шагу. Расположение кубик типв (1) и (2) следует из леммы 1.13. □

1.1 Инварианты форм, уравнение Морделла

Рассмотрим общую форму $f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i y^{d-i}$, где коэффициенты a_i – целые.

Определение 1.15 *Две бинарные формы f и g называются эквивалентными, если существуют p, q, r, s, такие что $ps - qr = 1$, что $g(x, y) = f(px + qy, rx + sy)$.*

Важную роль играют инварианты форм. Т.е. полиномы от коэффициентов $a_0, ...a_d$, инвариантные относительно эквивалентных превращений.

Определение 1.16 *Если $f(1,0) \neq 1$, то дискриминантом формы f называется выражение*

$$D_f := a_d^{2d-2} \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2$$

Пример 1.2 *Для квадратичной формы $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ дискриминант равен*

$$D_f = 4(b^2 - ac).$$

В случае кубической формы $g = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ дискриминант равен

$$D_f = 27(-a^2d^2 + 6abcd + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3).$$

Замечание 1.17 *Для квадратичных и кубических форм от двух переменных дискриминант (и многочлены от него) являются единственными инвариантами.*

Из определения дискриминанта легко следует

Предложение 1.18 *Пусть f – бинарная кубическая форма, тогда в зависимости от знака дискриминанта возможны следующие варианты:*

1) Если $D_f > 0$, то уравнение $f = 0$ имеет три различных корня,

2) Если $D_f < 0$, то уравнение $f = 0$ имеет один корень,

1) Если $D_f = 0$, то у уравнения $f = 0$ по крайней мере два корня совпадают.

Если формы эквивалентны, то и их дискриминанты равны.

Пусть мы фиксировали дискриминант и имеем дело с формами с целыми коэффициентами. Возникает естественный вопрос, а сколько таких форм?

Оказывается, что верна следующая

Теорема 1.19 *Число классов эквивалентности целочисленных бинарных форм заданной степени и заданного дискриминанта конечен.*

Для квадратичных форм – это простое вычисление (проделайте сами).

Рассмотрим кубическую форму $f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$.

Определение 1.20 *Для кубической формы $f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ гессианом называется выражение*

$$H_f = \frac{-1}{36}(f_{x,x}f_{y,y} - f_{x,y}f_{y,x}). \tag{2}$$

Ковариантной кубической формой называется форма

$$G_f = \frac{1}{3}(f_x H_{f,y} - f_y H_{f,x}). \tag{3}$$

Предложение 1.21 *Если кубические формы f и g эквивалентны, то $H_f = H_g$ и $G_f = G_g$.*

Для кубической формы $f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ гессиан H_f равен

$$H_f = (b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2.$$

Если дискриминант кубической формы f равен $27D_1$, то дискриминант гессиана равен D_1.

Таким образом, выполнена

Теорема 1.22 *Пусть $f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ – кубическая форма, то*

$$G^2 + D_1 f^2 = 4H^3. \tag{4}$$

Следствие 1.23 *Если кубическая форма f с дискриминантом $108k$ такова, что $f(x, y) = 1$ имеет решение (x_0, y_0), то уравнение*

$$y^2 + d = x^3, \tag{5}$$

называемое уравнением Морделла, имеет решение $x = H_f(x_0, y_0), y = G_f(x_0, y_0)/2$.

*Доказательство:*Надо просто поставить в уравнение из теоремы 1.22. □

При этом верно и обратное

Теорема 1.24 *Рассмотрим уравнение Морделла $y^2 + k = x^3$, $(k \neq 0)$ и предположим, что оно имеет решение (p, q). Тогда форма $f(x, y) = x^3 - 3pxy^2 + 2qy^3$ имеет дискриминант $D_1 = 4k$ и $p = H_f(1, 0), q = G(1, 0)/2$. Более того, $H(x, y) = px^2 - 2qxy + p^2y^2$ и $G(x, y) = 2(-qx^3 + 3p^2x^2y - 3pqxy^2 + (-p^3 + 2q^2)y^3)$.*

Доказательство:

С помощью вычислений нетрудно убедиться, что форма $f(x, y) = x^3 - 3pxy^2 + 2qy^3$ имеет дискриминант $D_1 = 4k$ и $p = H_f(1, 0), q = G(1, 0)/2$.

Поскольку гессиан и ковариантная кубика являются инвариантом класса эквивалентности кубических форм, то можно рассматривать формы, такие что $f(x_0, y_0) = 1$. По теореме 1.19 есть конечное число классов эквивалентности кубик с дискриминантом $4k$. Для каждой из них мы решаем уравнение $f(x, y) = 1$. Теорема 1.25 (ниже) говорит, что оно имеет конечное число решений.

□

Теорема 1.25 *Пусть $f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_ny^n$ – многочлен степени $n \geq 3$ с целыми коэффициентами. Предположим, что он неприводим и m – ненулевое целое число. Тогда уравнение*

$$f(x, y) = m$$

имеет конечное число решений.

1.2 Решение кубического уравнения, формула Кардано

Чтобы решить уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ надо сделать замену $x \to z = x + b/(3a)$. Сделаем замену $z = u + v, uv = \frac{3ac-b^2}{9a^2}$ и получим $u^6 - 2Ru^3 - Q^3 = 0$, где $R = \frac{9abc-27a^2d-2b^3}{54a^3}$.

Далее, решаем квадратное уравнение относительно u^3. Затем находим решения уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

2 Кубические формы от трёх переменных. Плоские кубики

В этом разделе мы будем иметь дело с кубическими формами от трёх переменных. Расскажем про нормальную форму кубической кривой, пучок Гессе, сложение точек на кривой.

2.1 Теорема о девяти точках (Кэли-Бахараха)

Обозначим через S_d пространство всех форм степени d от переменных x, y, z. Очевидно, что S_d является векторным пространством с базисом

$$\begin{array}{r} z^d, \\ z^{d-1}x, z^{d-1}y, \\ ... \\ x^d, ..., y^d \end{array}$$

И, в частности, $dimS_d = C^2_{d+2}$.

Для набора точек $P_1, .., P_n \in \mathbb{P}^2$ положим

$$S_d(P_1, ..., P_n) = F \in S_d | F(P_i) = 0, i = 1, ..., n \in S_d.$$

Каждое из условий $F(P_i)$ задаёт линейное соотношение. Поэтому размерность этого подпространства не менее $C^2_{d+2} - n$.

Определение 2.1 *Алгебраической кривой называется множество решений $F = 0$, где F – некоторая форма.*

В наших лекциях мы сосредоточимся на случае кубик ($d = 3$). Но для начала нам нужно доказать пару вспомогательных утверждений.

Теорема 2.2 *Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ – прямая (соответственно $C \subset \mathbb{P}^2$ – невырожденная коника) и $D \subset \mathbb{P}^2$ – кривая, определяемая условием $D : (G_d(x, y, z) = 0)$, где G — форма степени d. Предположим, что L не лежит на D (соответственно C не лежит на D). Тогда $\#[L \cap D] < d$ (соответственно $\#[C \cap D] < 2d$).*

*Доказательство:*Если прямая (коника) задаются линейными (квадратичными) соотношениями, то точки пересечения это те точки, для которых

$$F(u, v) = f(a(u, v), b(u, v), c(u, v)),$$

где f – исходная форма, а a, b, c – линейные (квадратичные) функции.

□

Лемма 2.3 *Пусть $L : (= 0) \subset \mathbb{P}^2$ – прямая соответственно $C : (Q = 0) \subset \mathbb{P}^2$ – невырожденная коника). Предположим, что на $\mathbb{P}^2$ зафиксирован набор точек $_1, ..., _n$, и рассмотрим простран- пространство $S_d(P_1, ..., P_n)$ для некоторого фиксированного d. Тогда*

(i) если $P_1, ...P_a \in L$ и $P_{a+1}, ..., P_n$ не лежат на L и $a > d$, то

$$S_d(P_1, ..., P_n) = H \cdot S_{d-1}(P_{a+1}, ..., P_n),$$

(ii) $P_1, ...P_a \in C$ и $P_{a+1}, ..., P_n$ не лежат на C и $a > 2d$, то

$$S_d(P_1, ..., P_n) = Q \cdot S_{d-1}(P_{a+1}, ..., P_n).$$

Доказательство следует из того факта, что прямая (коника) пересекают кривую $F = 0$ в большом числе точек по теореме 2.2. А значит лежит на ней.

Предложение 2.4 *Пусть $P_1, ..., P_8 \in \mathbb{P}^2$ – набор различных точек. Предположим, что никакие 4 точки из $P_1, ..., P_8$ не коллинеарны и никакие 7 из них не лежат на невырожденной конике. Тогда*

$$dim S_3(P_1, ..., P_8) = 2.$$

Замечание 2.5 *Т.е. размерность $S_3(P_1, ..., P_8) = 2$ минимальная возможная.*

Доказательство:

Доказательство можно провести, рассмотрев три случая.

(1) Все точки общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, шесть – на одной конике)

От противного. Если размерность хотя бы три, то можно взять на прямой $L = P_1P_2$ две несовпадающие точки, то

$$dim S_3(P_1, ..., P_{10}) = S_3(P_1, ..., P_8) - 2 \geq 1.$$

Значит там есть какая-то форма, обозначим её F.

Тогда по следствию 2.3 $F = H \cdot Q$, где $Q \in S_2(P_3, ..., P_8)$. Получаем противоречие с предположением.

(2) Три точки на одной прямой

Пусть P_1, P_2, P_3 коллинеарны. Возьмём ещё одну точку на этой прямой, P_9. Тогда по теореме 2.3 выполнено $S_3(P_1, ..., P_9) = H \cdot S_2(P_4, ..., P_8)$. Более того, никакие четыре точки из $P_4, ..., P_8$ по условию не коллинеарны. Тем самым, $dim S_3(P_1, ..., P_9) = dim S_2(P_4, ..., P_8) = 1$. И $dim S_3(P_1, ..., P_9) \leq 2$.

(3) Шесть точек на конике.

Рассуждение аналогично (2) только с использованием коники.

$\square$

Теорема 2.6 *Пусть C_1, C_2 – две кубические кривые, пересечение которых состоит из 9 различных точек, $C_1 \cap C_2 = P_1, ..., P_9$. Тогда кубика D, проходящая через точки $P_1, ..., P_8$, проходит также и через P_9.*

Доказательство:

Если какие-нибудь четыре точки из набора $P_1, ..., P_9$ лежат на одной прямой L, то C_1 и $_2$ пересекают L не менее чем в четырех точках и, значит, содержат ее (по теореме 2.2), что противоречит условию. По тем же причинам никакие 7 из указанных точек не могут быть *конконическими* (лежать на одной конике). Таким образом, в рассматриваемом случае выполнены усло- условия предложения 2.4), откуда следует, что

$$dim S_3(P_1, ..., P_8) = 2.$$

Из этого следует, что многочлены, которые задают кривые C_1, C_2, образуют базис пространства $S_3(P_1, ..., P_8)$. Обозначим их через F_1, F_2 соответственно. Тогда каким уравнением задаётся кубика D? Понятно, что линейной комбинацией $F_D = a_1F_1 + a_2F_2$. Следовательно, $F_D(P_9) = 0$.

$\square$

Следствие 2.7 (Теорема Паскаля) *Дан шестиугольник $ABCDEF$, лежащий в $\mathbb{P}^2$, пары противоположных сторон которого продолжены до пересечения в точках $, Q, R$. Предположим, что все 9 точек и 6 прямых различны. Тогда*

$$A, B, C, D, E, F \text{ конконичны} \Leftrightarrow P, Q, R \text{ коллинеарны.}$$

2.2 Сложение точек на кубиках

Пусть F кубическая форма, определяющая плоскую кривую $C \in \mathbb{P}^2$. Предположим также, что F неприводима (т.е. не содержит прямой или коники), и, что для любой точки $P \in C$ существует единственная прямая L, что P – кратный ноль $F|_L$.

Замечание 2.8 *Геометрически второе условие означает, что прямая L является касательной и, что кривая C "неособая".*

Форма F, как говорилось выше, является комбинацией десяти мономов. Поэтому кубические кривые образуют проективное пространство размерности девять (мы можем рассматривать коэффициенты при мономах как однородные координаты).

Условие на то, что C проходит через точку P даёт одно линейное условие на F. Тем самым, мы можем найти кубику, проходящую через девять данных точек. При этом она может быть вырожденной и не единственной. Но, если точки в общем положении, то она невырожденна и единственна.

Конструкция

1. Зафиксируем произвольную точку $O \in C$.

2. Для точки $A \in C$ обозначим через $\bar{A}$ третью точку пересечения C с прямой OA.

3. Для $A, B \in C$ обозначим через D третью точку пересечения прямой AB с C. Определим сумму $A + B$ по формуле $A + B := \bar{D}$.

Теорема 2.9 *Описанная конструкция задает на структуру абелевой группы, нулем (нейтральным элементом) которой является точка O.*

Основное, что требуется проверить в этой теореме – это ассоциативность. Для этого мы делаем следующее. Пусть на кривой C заданы точки A, B, D. При построении суммы $(A + B) + D = \bar{S}$ нам понадобятся четыре прямые:

$$L_1 : ABR, L_2 : RO\bar{R}, L_3 : D\bar{R}S, L_4 : SO\bar{S}.$$

При построении суммы $(B + D) + A = \bar{T}$ необходимы следующие четыре прямые:

$$L_1 : BEQ, L_2 : QO\bar{Q}, L_3 : A\bar{Q}T, L_4 : TO\bar{T}.$$

Нужно доказать, что $\bar{S} = \bar{T}$. Рассмотрим две кубики: $D_1 = L_1 + M_2 + L_3$ и $D_2 = M_1 + L_2 + M_3$.

Кубики C и D_1 пересекаются в девяти точках $A, B, D, O, R, \bar{R}, Q, \bar{Q}, S$, а D_2 проходит через восемь из них. Используем теорему 2.6 и получаем, что D_2 проходит через S.

2.3 Нормальная форма

Оказывается, что кубику на плоскости можно привести к нормальному виду Вейерштрасса

$$y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3. \tag{6}$$

В аффинной записи (карта $z = 1$) мы получаем

$$y^2 = x^3 + ax + b. \tag{7}$$

Действительно, возьмём кубику C на проективной плоскости и рациональную точку O на ней. Возьмём в качестве $Z = 0$ касательную к ней, она пересечёт кубику C в какой-то другой точке. Касательную в этой точке возьмём в качестве $X = 0$, в качестве $Y = 0$ возьмём любую прямую, проходящую через точку O.

После такого выбора осей, положим $x = X/Z, y = Y/Z$. Тогда уравнение кубики после преобразований (проверьте!) примет вид

$$xy^2 + (ax+b)y = cx^2 + dx + e.$$

Домножим на x, переименуем координаты и получим

$$y^2 = P_3(x),$$

где $P_3(x)$ – многочлен третьей степени от x.

Затем можно отнормировать и сделать старшим коэффициентом при x^3 единицу. И избавиться от квадратичного члена подходящей линейной заменой.

Пусть теперь у нас кривая C имеет нормальную форму. Найдём её пересечение с бесконечно удалённой прямой L, заданной соотношением $z = 0$. Легко видеть, что $F|_L = x^3$. Таким образом, $F|_L$ имеет в точке $(0, 1, 0)$ ноль кратности три.

Если положить $y = 1$, то уравнение кубики примет вид $z = {}^3 + axz^2 + bz^3$. И в точке $(0, 1, 0)$ эта кривая аппроксимируется кривой $z = x^3$.

Точка на кривой с данными свойствами называется точкой перегиба.

Определение 2.10 *Пусть C – кубическая кривая, P – точка на ней называется точкой перегиба, если существует прямая $L \subset \mathbb{P}^2$, такая что $F|_L$ имеет ноль кратности ≥ 3 в точке P.*

На самом деле точки перегиба можно опредялять совершенно другим образом и на гладкой кубической кривой их ровно девять.

Определение 2.11 *Гессианом кривой называется кривая, заданная определителем матрицы вторых производных.*

Эта кривая также задаётся многочленом третьей степени. Легко видеть, что гессиан формы F не равен форме F, умноженной на константу.

Действительно, легко проверить, что существует система координат, где кривая, заданная формой F может быть записана уравнением

$$F = zy^2 + ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 + ex^2y,$$

Гессиан в точке $(0, 1, 0)$ равен $8e$. Если $e \neq 0$, то утверждение очевидно. Пусть $e = 0$. Тогда $a \neq 0$, иначе F делится на z и, как следствие, особа.

Гессиан на прямой $z = 0$ равен $24axy^2$ и не является кратным ax^3 (значение F на $z = 0$ при $e = 0$).

Значит, кривая, заданная гессианом пересекает нашу исходную кубику в минимум одной, максимум девяти точках.

Оказывается, что таких точек ровно девять.

Заметим, что

Предложение 2.12 *Гессиан пересекает кубическую кривую в девяти точках.*

Простая проверка показывает, что гессиан и наша кривая пересекаются трансверсально в каждой своей точке пересечения, значит, все такие точки имеют кратность один. Используя теорему Безу получаем, что таких точек ровно девять.

Используя нормальную форму Вейерштрассе 6 можно в более простой форме записать групповой закон.

Для этого возьмём точку перегиба $(0, 1, 0)$ в качестве нейтрального элемента. Тогда взятие обратного соответствует $(x, y) \to (x, -y)$, сложение устроено следущим образом: через две заданные точки провояdт прямую, она пересекает кубику в ещё одной точке и суммой является вторая точка пересечения с кубикой прямой, проходящей через неё и O,– и для всех $P, Q, R \in C$ верно, что $P + Q + R = O$, титтк они коллинеарны.

2.4 Пучок Гессе

Помимо нормальной формы 6 большое значение имеет, так называемая, нормальная форма Вейерштрасса. Выше мы доказали, что существует ровно девять точек пересечения у кривой гессиана и исходной кривой. Оказывается, что через эти 9 точек проходит 12 различных прямых. Приэтом каждая прямая проходит через три точки перегиба, а через каждую точку – 4 прямые (посмотрите листочек с задачами!).

Пусть L_1, L_2 – две прямые, проходящие через точки перегиба. Выберем проективные координаты, так чтобы уравнения этих прямых имели вид $x = 0$ и $y = 0$.

Тогда уравнение кривой может быть записано в виде

$$F(x, y, z) = xy(ax + by + cz) + dz^3, \tag{8}$$

где $ax + by + cz = 0$ – третья прямая перегиба. Предположим, что они сонаправленны, тогда уравнение выше примет вид $xy(x + y) + z^3 = 0$, а это особая кривая. Таким образом, для неособых кубик три прямые перегиба не сонаправленны.

Отнормировав координату z, мы можем предполагать, что $c = 3$. Пусть w – корень третьей степени из единицы. Сделаем замену координат

$$ax + z = wu + w^2v, \quad by + z = w^2u + wv.$$

Тогда

$$abF(x, y, z) = (wu+w^2v-z)(w^2u+wv-z)(-u-v-z)+d'z^3 = u^3+v^3+(d'-1)z^3+uvz,$$

Так как кривая неособая, то $d' \neq 1$. Перенормирова координаты получаем каноническую форму Гессе кубической кривой

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 0 \tag{9}$$

Замечание 2.13 *Кривая в канонической форме Гессе особа тогда и только тогда, когда* $\lambda^3 = -27$.

Список литературы

Ю. Манин, Кубические формы: Алгебра, геометрия и арифметика.

Zeeman, Umbilic bracelet and double-cusp catastrophe.

O.Debarre, Around cubic hypersurfaces.

M. Reid. Young's guide to algebraic geometry.