Решётки и упаковки шаров

Виктор Клепцын

CNRS, Institute of Mathematical Research of Rennes, University of Rennes 1

Летняя школа «Современная математика», Ратмино, Дубна

Упаковки шаров

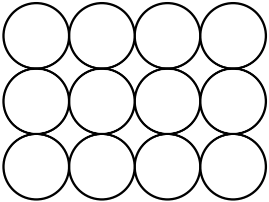
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса

Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

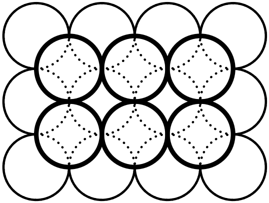
Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?



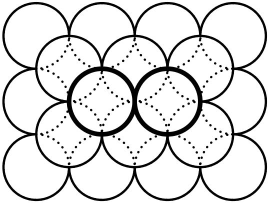
Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?



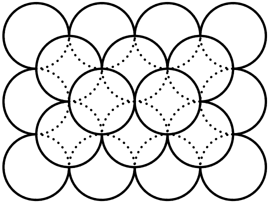
Упаковки шаров

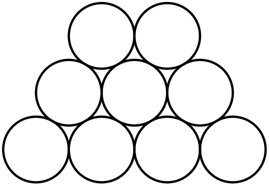
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?



Упаковки шаров

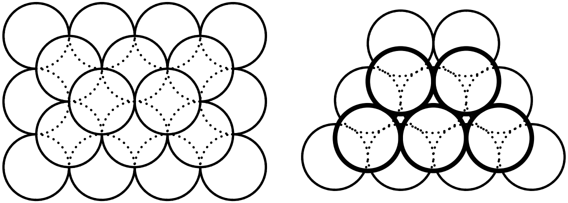
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?





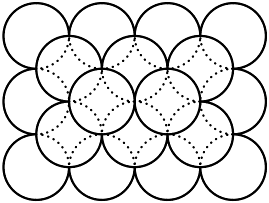
Упаковки шаров

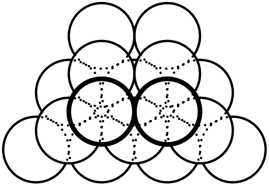
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?



Упаковки шаров

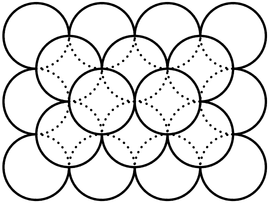
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

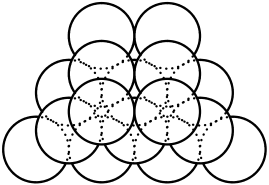




Упаковки шаров

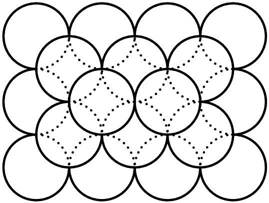
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

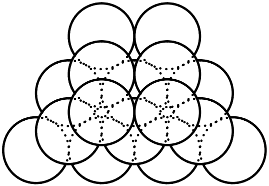


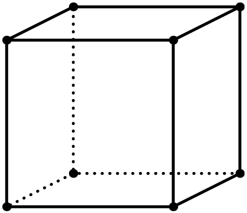


Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

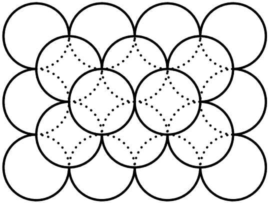


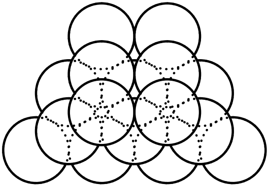


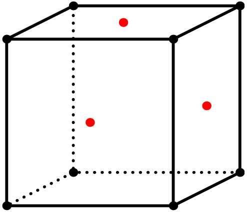


Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

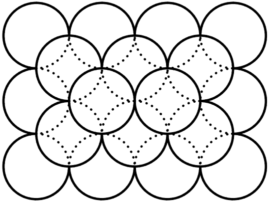


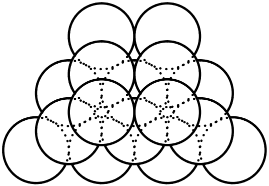


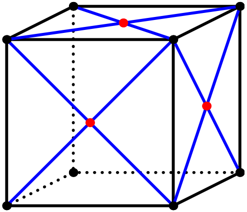


Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

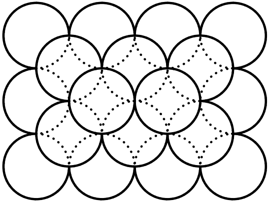


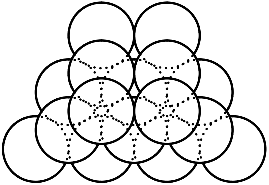


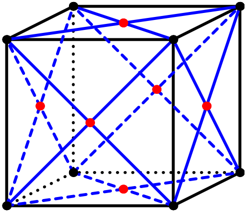


Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

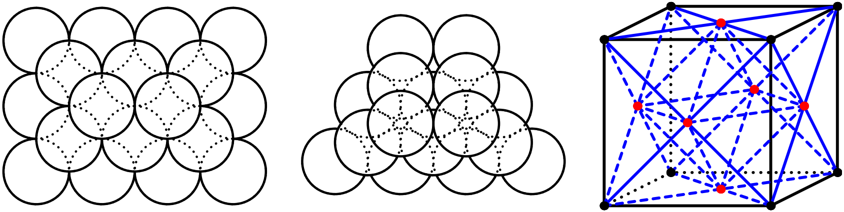






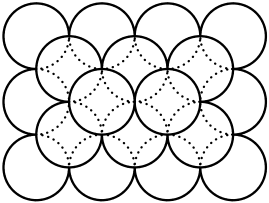
Упаковки шаров

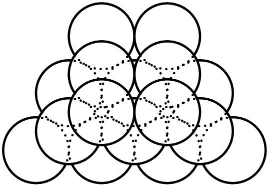
Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

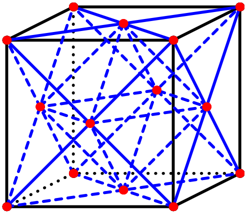


Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

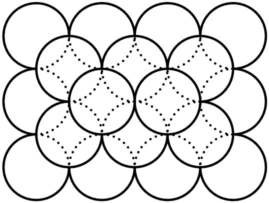
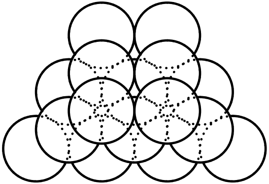
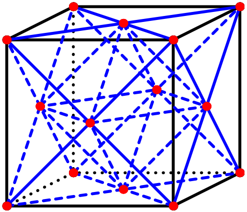






Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?

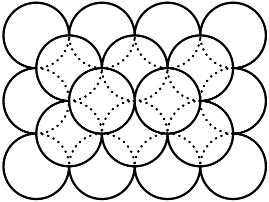
  

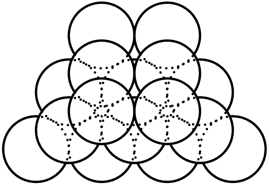
Упражнение

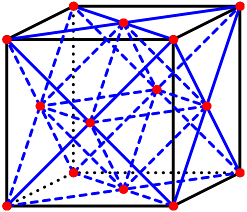
Какая из этих упаковок плотнее?

Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?







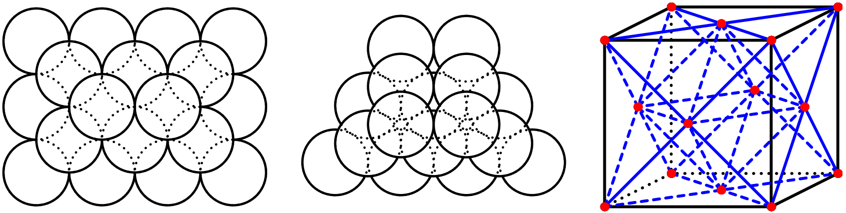
Упражнение

Какая из этих упаковок плотнее?

Ответ.

Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?



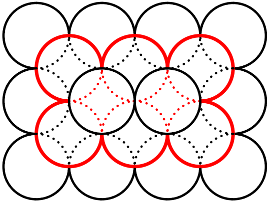
Упражнение

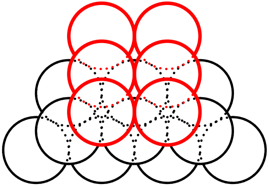
Какая из этих упаковок плотнее?

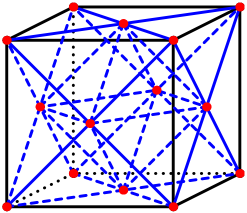
Ответ. Оказывается, это одна и та же упаковка!

Упаковки шаров

Задача Кеплера: Как плотнее всего упаковать непересекающиеся шары одинакового радиуса (яблоки, апельсины, и т.д.)?







Упражнение

Какая из этих упаковок плотнее?

Ответ. Оказывается, это одна и та же упаковка!

Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

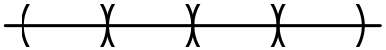
Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$

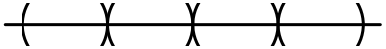
Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 

Другие размерности

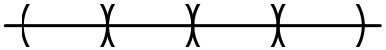
Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

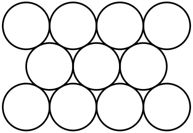
- $n = 1$ 

- $n = 2$

Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

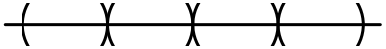
- $n = 1$ 

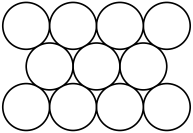


- $n = 2$

Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 

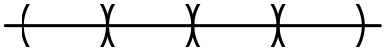
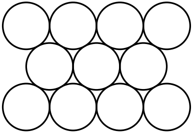
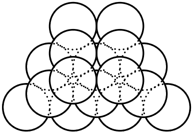


- $n = 2$

- $n = 3$

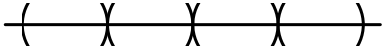
Другие размерности

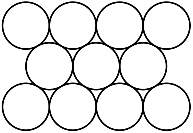
Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 
- $n = 2$ 
- $n = 3$ 

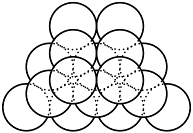
Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 



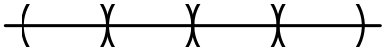
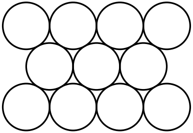
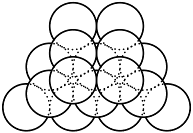
- $n = 2$



- $n = 3$
- А правда ли, что дальше будет только хуже и сложнее?

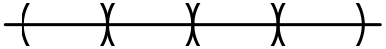
Другие размерности

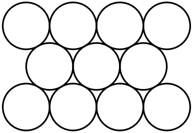
Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 
  
- $n = 2$
  
- $n = 3$
- А правда ли, что дальше будет только хуже и сложнее? Как ни странно, не всегда!

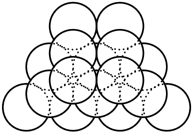
Другие размерности

Вопрос о плотнейшей упаковке можно задать и в других размерностях:

- $n = 1$ 



- $n = 2$



- $n = 3$
- А правда ли, что дальше будет только хуже и сложнее? Как ни странно, не всегда!
  Хотя будет всё страньше и страньше.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \ldots, B_{2^n}$ единичного диаметра.

Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \dots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \ldots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Упражнение

Найдите диаметр B'.

Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \dots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Упражнение

Найдите диаметр B'.

Ответ:

Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \ldots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Упражнение

Найдите диаметр B'.

Ответ: $\sqrt{n} - 1$.

Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \ldots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Упражнение

Найдите диаметр B'.

Ответ: $\sqrt{n} - 1$.

Замечание

Начиная с размерности 5, этот шар больше исходных.

Геометрия старших размерностей

Пусть в вершинах единичного куба расположены (касающиеся) шары $B_1, \ldots, B_{2^n}$ единичного диаметра. Поставим в центр куба новый шар B', касающийся всех B_i.

Упражнение

Найдите диаметр B'.

Ответ: $\sqrt{n} - 1$.

Замечание

Начиная с размерности 5, этот шар больше исходных. Начиная с размерности 10 — он пересекает границу куба с ребром 2, содержащего все B_i.

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$.

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого "единичного гиперкуба", образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого “единичного гиперкуба”, образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.
Мы получаем упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$, центры которой — точки решетки

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого "единичного гиперкуба", образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.
Мы получаем упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$, центры которой — точки решетки

$$D_4 := \mathbb{Z}^4 \bigcup (\mathbb{Z}^4 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого "единичного гиперкуба", образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.
Мы получаем упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$, центры которой — точки решетки

$$D_4 := \mathbb{Z}^4 \bigcup (\mathbb{Z}^4 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

Упражнение

Сколько шаров в этой конструкции касается центрального шара?

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого "единичного гиперкуба", образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.
Мы получаем упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$, центры которой — точки решетки

$$D_4 := \mathbb{Z}^4 \bigcup (\mathbb{Z}^4 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

Упражнение

Сколько шаров в этой конструкции касается центрального шара?

Ответ. 24.

$n = 4$: шахматная решётка

Упакуем единичные шары в $\mathbb{R}^4$ так, чтобы их центры были в точках из $\mathbb{Z}^4$. Тогда в центр каждого "единичного гиперкуба", образованного этими точками, можно добавить еще один единичный шар так, что он будет этих шаров касаться.
Мы получаем упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$, центры которой — точки решетки

$$D_4 := \mathbb{Z}^4 \bigcup (\mathbb{Z}^4 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

Упражнение

Сколько шаров в этой конструкции касается центрального шара?

Ответ. 24. Их центры образуют один из правильных многогранников в четырехмерном пространстве.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Упражнение

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_8) \in \mathbb{Z}^8$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Упражнение

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_8) \in \mathbb{Z}^8$. Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Упражнение

Пусть $k = (k_1, \dots, k_8) \in \mathbb{Z}^8$. Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Lambda := \{k \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum_{i=1}^{8} k_i \equiv 0 \mod 2\}$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Упражнение

Пусть $k = (k_1, \dots, k_8) \in \mathbb{Z}^8$. Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Lambda := \{k \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum_{i=1}^{8} k_i \equiv 0 \mod 2\}$.

Определение

Решётка Коркина–Золотарева — решётка $E_8 := \Lambda \bigcup (\Lambda + v)$.

$n = 8$: решётка Коркина–Золотарева

Рассмотрим вектор $v := (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^8$.

Упражнение

Найдите $|v|^2 = \langle v, v \rangle$.

Упражнение

Пусть $k = (k_1, \dots, k_8) \in \mathbb{Z}^8$. Тогда сумма координат k четна $\Leftrightarrow$ $\langle k, v \rangle \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Lambda := \{k \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum_{i=1}^{8} k_i \equiv 0 \mod 2\}$.

Определение

Решётка Коркина–Золотарева — решётка $E_8 := \Lambda \bigcup (\Lambda + v)$.

Упражнение

Пусть $v \in E_8$. Докажите, что $|v|^2 \in 2\mathbb{Z}$.

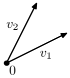
Решетки

Определение

Решёткой в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек вида

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\},$$

где $(v_1, \ldots, v_n)$ — (некоторый) базис $\mathbb{R}^n$.



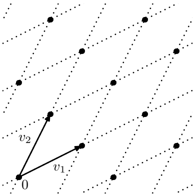
Решетки

Определение

Решёткой в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек вида

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\},$$

где $(v_1, \ldots, v_n)$ — (некоторый) базис $\mathbb{R}^n$.



Решетки

Определение

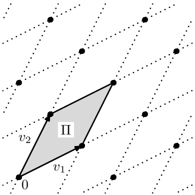
Решёткой в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек вида

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\},$$

где $(v_1, \ldots, v_n)$ — (некоторый) базис $\mathbb{R}^n$.
Кообъемом решетки Λ называется объем ее фундаментального параллелепипеда

$$\Pi = \{x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \mid x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]\}.$$

Этот объем обозначается $\operatorname{covol} \Lambda$.



Решетки

Определение

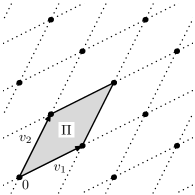
Решёткой в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек вида

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\},$$

где $(v_1, \ldots, v_n)$ — (некоторый) базис $\mathbb{R}^n$.
Кообъемом решетки Λ называется объем ее фундаментального параллелепипеда

$$\Pi = \{x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \mid x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]\}.$$

Этот объем обозначается $\operatorname{covol} \Lambda$.



Определение

$d_{\min}(\Lambda) := \min_{v \in \Lambda \setminus \{0\}} |v|$.

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$.

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Как определить его плотность?

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Как определить его плотность?
Возьмем семейство K_m «больших» (разумных) частей $\mathbb{R}_n$:

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Как определить его плотность? Возьмем семейство K_m «больших» (разумных) частей $\mathbb{R}_n$: например, положим $K_m = [-m, m]^n$.

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Как определить его плотность? Возьмем семейство K_m «больших» (разумных) частей $\mathbb{R}_n$: например, положим $K_m = [-m, m]^n$.

Определение

Плотностью подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется предел

$$\rho_0(A) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(A \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Плотности множеств

Пусть есть множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Как определить его плотность? Возьмем семейство K_m «больших» (разумных) частей $\mathbb{R}_n$: например, положим $K_m = [-m, m]^n$.

Определение

Плотностью подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется предел

$$\rho_0(A) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(A \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Предел может не существовать — тогда нужно говорить о верхней/нижней плотности, и т. д..

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\rho(X) := \lim_{m\to\infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\operatorname{vol} K_m}.$$

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\operatorname{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

$$\rho(X) := \lim_{m\to\infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\operatorname{vol} K_m}.$$

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

где $\mathbf{c}_n$ — объем одного единичного шара.

$$\rho(X) := \lim_{m\to\infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

где $\mathbf{c}_n$ — объем одного единичного шара.

Определение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — дискретное множество. Его (“точечной”) плотностью называется предел

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

где $\mathbf{c}_n$ — объем одного единичного шара.

Определение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — дискретное множество. Его ("точечной") плотностью называется предел

$$\rho(X) := \lim_{m \to \infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

где $\mathbf{c}_n$ — объем одного единичного шара.

Определение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — дискретное множество. Его (“точечной”) плотностью называется предел

$$\rho(X) := \lim_{m \to \infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Упражнение

$\rho_0(A) = \mathbf{c}_n \cdot \rho(\mathcal{C})$.

Плотности упаковок и решеток

Если A — упаковка единичных шаров с множеством центров $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{vol}(A \bigcap K_m) \approx \mathbf{c}_n \cdot \#(\mathcal{C} \bigcap K_m),$$

где $\mathbf{c}_n$ — объем одного единичного шара.

Определение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — дискретное множество. Его ("точечной") плотностью называется предел

$$\rho(X) := \lim_{m\to\infty} \frac{\#(X \bigcap K_m)}{\mathrm{vol}\, K_m}.$$

Упражнение

$\rho_0(A) = \mathbf{c}_n \cdot \rho(\mathcal{C})$.

Упражнение

Если Λ — решётка, то $\rho(\Lambda) = 1/(\mathrm{covol}\, \Lambda)$.

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая функция, что:*

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая функция, что:*

- *(пока) СЕКРЕТНО*

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая функция, что:

- *(пока) СЕКРЕТНО*

Тогда для любой решетки Λ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$ плотность ее точек не превосходит

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая функция, что:

- *(пока) СЕКРЕТНО*

Тогда для любой решетки Λ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$ плотность ее точек не превосходит

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая функция, что:

- *(пока) СЕКРЕТНО*

Тогда для любой решетки Λ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$ плотность ее точек не превосходит

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Это — машина по производству верхних оценок из "хороших" функций f.

Верхняя оценка плотности

Как вообще можно подойти к задаче о плотности упаковок?

Теорема (Горбачев, 2000; Cohn-Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая функция, что:

- *(пока) СЕКРЕТНО*

Тогда для любой решетки Λ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$ плотность ее точек не превосходит

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Это — машина по производству верхних оценок из "хороших" функций f.

А что такое $\widehat{f}$?

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k, \quad c_k(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle}.$$

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k, \quad c_k(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle}.$$

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Смысл: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами a и b.

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k, \quad c_k(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle}.$$

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Смысл: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами a и b.

Предложение

Пусть базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ортогональный:

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Смысл: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами a и b.

Предложение

Пусть базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ортогональный: $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Смысл: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами a и b.

Предложение

Пусть базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ортогональный: $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k,$$

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Смысл: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами a и b.

Предложение

Пусть базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ортогональный: $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k, \quad c_k(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle}.$$

Отступление: базисы и скалярные произведения

Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $\mathbb{C}^n$ определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}.$$

Предложение

Пусть базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ *пространства* $\mathbb{C}^n$ *ортогональный:* $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ *при* $i \neq j$. *Тогда*

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{v}) \cdot \vec{e}_k, \quad c_k(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle}.$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

“Базис”:

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx}$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

"Базис":

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx),$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

"Базис":

$$f_k(x) := e^{2\pi i k x} = \cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

“Базис”:

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Этот базис — ортонормальный:

$$\langle f_k, f_l\rangle =$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

“Базис”:

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Этот базис — ортонормальный:

$$\langle f_k, f_l \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} e^{2\pi i(k-l)x}\, dx$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

"Базис":

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Этот базис — ортонормальный:

$$\langle f_k, f_l \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} e^{2\pi i(k-l)x}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ & \end{cases}$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности

Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В (хороших) функциях на ней есть скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

“Базис”:

$$f_k(x) := e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Этот базис — ортонормальный:

$$\langle f_k, f_l\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} e^{2\pi i(k-l)x}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x)$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x) = \sum_k c_k(f) \cdot e^{2\pi i k x},$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x) = \sum_k c_k(f) \cdot e^{2\pi i k x},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f:

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x) = \sum_k c_k(f) \cdot e^{2\pi i k x},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f:

$$c_k(f) = \langle f, f_k \rangle$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x) = \sum_k c_k(f) \cdot e^{2\pi i k x},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f:

$$c_k(f) = \langle f, f_k \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности-2

Разложим любую (хорошую) функцию f по этому базису:

$$f(x) = \sum_k \langle f, f_k \rangle \cdot f_k(x) = \sum_k c_k(f) \cdot e^{2\pi ikx},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f:

$$c_k(f) = \langle f, f_k \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} f(x) e^{-2\pi ikx} dx.$$

⚠ Мы оставляем за кадром, в каком смысле и при каких условиях ряд Фурье сходится!

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L.

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L. Тогда

$$f_k(x) = e^{2\pi i \frac{k}{L} x},$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L. Тогда

$$f_k(x) = e^{2\pi i \frac{k}{L} x}, \quad \langle f_k, f_k \rangle = L.$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L. Тогда

$$f_k(x) = e^{2\pi i \frac{k}{L} x}, \quad \langle f_k, f_k \rangle = L.$$

Значит,

$$f(x) = \sum_k \frac{1}{L} \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f(x) e^{-2\pi i y_k x}\, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x},$$

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L. Тогда

$$f_k(x) = e^{2\pi i \frac{k}{L} x}, \quad \langle f_k, f_k \rangle = L.$$

Значит,

$$f(x) = \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f(x) e^{-2\pi i y_k x}\, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x},$$

где $y_k = \frac{k}{L}$.

Отступление: преобразование Фурье на окружности длины L

Рассмотрим теперь окружность $\mathbb{S}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ длины L. Тогда

$$f_k(x) = e^{2\pi i \frac{k}{L} x}, \quad \langle f_k, f_k \rangle = L.$$

Значит,

$$f(x) = \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f(x) e^{-2\pi i y_k x} \, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x},$$

где $y_k = \frac{k}{L}$.

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая)

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая) функция на $\mathbb{R}$. Приблизим ее функциями $f_{(L)}$ на окружности длины L:

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая) функция на $\mathbb{R}$. Приблизим ее функциями $f_{(L)}$ на окружности длины L:

$$f_{(L)}(x) = f(x), \quad x \in (-L/2, L/2).$$

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая) функция на $\mathbb{R}$. Приблизим ее функциями $f_{(L)}$ на окружности длины L:

$$f_{(L)}(x) = f(x), \quad x \in (-L/2, L/2).$$

$$f_{(L)}(x) = \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f_{(L)}(x) e^{-2\pi i y_k x}\, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x}, \quad y_k = \frac{k}{L}.$$

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая) функция на $\mathbb{R}$. Приблизим ее функциями $f_{(L)}$ на окружности длины L:

$$f_{(L)}(x) = f(x), \quad x \in (-L/2, L/2).$$

$$f_{(L)}(x) = \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f_{(L)}(x) e^{-2\pi i y_k x}\, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x}, \quad y_k = \frac{k}{L}.$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i\, xy}\, dy,$$

Отступление: преобразование Фурье на прямой

Пусть теперь f — хорошая (как минимум, убывающая на бесконечности и интегрируемая) функция на $\mathbb{R}$. Приблизим ее функциями $f_{(L)}$ на окружности длины L:

$$f_{(L)}(x) = f(x), \quad x \in (-L/2, L/2).$$

$$f_{(L)}(x) = \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\int_{\mathbb{S}^1_L} f_{(L)}(x) e^{-2\pi i\, y_k x}\, dx \right) \cdot e^{2\pi i y_k x}, \quad y_k = \frac{k}{L}.$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i\, xy}\, dy, \quad \text{где} \quad \widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\, xy}\, dx.$$

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— достаточно "хорошая"*

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая).

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая). Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0)$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x)e^{-2\pi ikx}dx =$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x) e^{-2\pi i k x} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i k x} dx =$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x) e^{-2\pi ikx} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi ikx} dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi ikx} dx$$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F)$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x) e^{-2\pi ikx} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi ikx} dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi ikx} dx = \widehat{f}(k).$$

$\square$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k),$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x)e^{-2\pi ikx}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \widehat{f}(k).$$

$\square$

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k),$$

$$c_k(F) = \int_{\mathbb{S}^1} F(x)e^{-2\pi ikx}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \widehat{f}(k).$$

□

Доказательство для $\mathbb{Z}$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k),$$

поскольку

$$c_k(F) = \widehat{f}(k).$$

□

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ —

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — функции вида

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle}$$

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — функции вида

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} = e^{2\pi i k_1 x_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i k_n x_n},$$

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — функции вида

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} = e^{2\pi i k_1 x_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i k_n x_n}, \quad \vec{k} \in \mathbb{Z}^n.$$

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — функции вида

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} = e^{2\pi i k_1 x_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i k_n x_n}, \quad \vec{k} \in \mathbb{Z}^n.$$

Как и на окружности,

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\vec{k}}(f) e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle},$$

Отступление: многомерное преобразование Фурье

Базис в функциях на $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — функции вида

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} = e^{2\pi i k_1 x_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i k_n x_n}, \quad \vec{k} \in \mathbb{Z}^n.$$

Как и на окружности,

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\vec{k}}(f) e^{2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle}, \quad c_{\vec{k}}(f) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} d\vec{x}.$$

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

(достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая). Тогда

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(u).$$

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{u}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{u},$$

(достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая). Тогда

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(u).$$

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{u}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{u}, \quad \widehat{f}(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{x}.$$

(достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая). Тогда

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(u).$$

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{u}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{u}, \quad \widehat{f}(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{x}.$$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— достаточно "хорошая"*

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{u}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{u}, \quad \widehat{f}(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{x}.$$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — достаточно “хорошая” (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая).

Формула суммирования Пуассона для $\mathbb{Z}^n$

Для функций в пространстве тоже есть преобразование Фурье:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\vec{u}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{u}, \quad \widehat{f}(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle} d\vec{x}.$$

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая). Тогда

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(u).$$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{v}).$$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{v}).$$

Тогда

$$\sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{v}) = F(0)$$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{v}).$$

Тогда

$$\sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{v}) = F(0) = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\vec{k}}(F)$$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{v}).$$

Тогда

$$\sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{v}) = F(0) = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\vec{k}}(F) = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\vec{k}),$$

Доказательство для $\mathbb{Z}^n$

Доказательство.

Рассмотрим функцию на торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$F(\vec{x}) = \sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{x}+\vec{v}).$$

Тогда

$$\sum_{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n} f(\vec{v}) = F(0) = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\vec{k}}(F) = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\vec{k}),$$

поскольку

$$c_{\vec{k}}(F) = \widehat{f}(\vec{k}) \quad \forall \vec{k}\in\mathbb{Z}^n.$$

□

Случай произвольной решетки

А есть ли формула Пуассона для произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$?

Случай произвольной решетки

А есть ли формула Пуассона для произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$? И как устроен анализ Фурье на торе $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^n/\Lambda$?

Случай произвольной решетки

А есть ли формула Пуассона для произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$? И как устроен анализ Фурье на торе $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^n/\Lambda$?

Базис: гармоники

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle};$$

Случай произвольной решетки

А есть ли формула Пуассона для произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$? И как устроен анализ Фурье на торе $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^n/\Lambda$?
Базис: гармоники
$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle};$$
чтобы функция $f_{\vec{u}}$ была корректно определена на торе, нужно:

Случай произвольной решетки

А есть ли формула Пуассона для произвольной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$? И как устроен анализ Фурье на торе $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^n/\Lambda$?
Базис: гармоники

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle};$$

чтобы функция $f_{\vec{u}}$ была корректно определена на торе, нужно:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda.$$

Свойства решеток

Определение

Двойственной решёткой к решётке Λ называется решётка

$$\Lambda^* := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda\}.$$

Свойства решеток

Определение

Двойственной решёткой к решётке Λ называется решётка

$$\Lambda^* := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda\}.$$

Определение

Решётка Λ называется целой, если $\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall u, v \in \Lambda$.

Свойства решеток

Определение

Двойственной решёткой к решётке Λ называется решётка

$$\Lambda^* := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda\}.$$

Определение

Решётка Λ называется целой, если $\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall u, v \in \Lambda$.

Упражнение

Λ — целая $\Leftrightarrow$ $\Lambda \subset \Lambda^*$

Свойства решеток

Определение

Двойственной решёткой к решётке Λ называется решётка

$$\Lambda^* := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda\}.$$

Определение

Решётка Λ называется целой, если $\langle u, v\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall u, v \in \Lambda$.

Упражнение

Λ — целая $\Leftrightarrow$ $\Lambda \subset \Lambda^*$

Определение

Решётка Λ называется четной, если $\langle v, v\rangle \in 2\mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda$.

Свойства решеток

Определение

Двойственной решёткой к решётке Λ называется решётка

$$\Lambda^* := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda\}.$$

Определение

Решётка Λ называется целой, если $\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall u, v \in \Lambda$.

Упражнение

Λ — целая $\Leftrightarrow$ $\Lambda \subset \Lambda^*$

Определение

Решётка Λ называется четной, если $\langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z} \quad \forall v \in \Lambda$.

Упражнение

Четная решётка — целая.

Формула суммирования Пуассона для произвольной решетки

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— достаточно "хорошая"*

Формула суммирования Пуассона для произвольной решетки

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая),

Формула суммирования Пуассона для произвольной решетки

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая),* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— решётка.*

Формула суммирования Пуассона для произвольной решетки

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая),* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— решётка. Тогда*

$$\sum_{v \in \Lambda} f(v) = \frac{1}{\mathrm{covol}\,\Lambda} \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

Формула суммирования Пуассона для произвольной решетки

Теорема (Формула суммирования Пуассона)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *достаточно "хорошая" (достаточно гладкая и достаточно быстро убывающая),* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — *решётка. Тогда*

$$\sum_{v \in \Lambda} f(v) = \frac{1}{\operatorname{covol} \Lambda} \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

Замечание

Когда решётка Λ становится все более мелкой, выражение $(\operatorname{covol} \Lambda) \cdot \sum_{v \in \Lambda} f(v)$ стремится к $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$, а от решётки Λ^* "остается" только 0.

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) = \frac{1}{\operatorname{covol}\Lambda} \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$. Тогда

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) \geq f(0)$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$. Тогда

$$\sum_{v\in\Lambda} f(v) \geq f(0)$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v \in \Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.
- Пусть f четная,

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v \in \Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.

- Пусть f четная[1],

[1] Тогда $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v \in \Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.
- Пусть f четная, и $\widehat{f}(u) \geq 0$ везде. Тогда

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.
- Пусть f четная, и $\widehat{f}(u) \geq 0$ везде. Тогда

$$\sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) \geq \widehat{f}(0)$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) \geq \rho(\Lambda) \cdot \widehat{f}(0).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.
- Пусть f четная, и $\widehat{f}(u) \geq 0$ везде. Тогда

$$\sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) \geq \widehat{f}(0)$$

Верхняя оценка: доказательство для случая решётки

Как вообще можно доказывать такую оценку?

- Формула суммирования Пуассона:

$$f(0) \geq \sum_{v \in \Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u) \geq \rho(\Lambda) \cdot \widehat{f}(0).$$

- Пусть $f(v) \leq 0$ при $|v| \geq 1$.
- Пусть f четная, и $\widehat{f}(u) \geq 0$ везде.

  Тогда для любой решетки Λ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$ выполнено

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$$

Верхняя оценка: почти-формулировка

Теорема

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— чётная функция, такая, что:*

Верхняя оценка: почти-формулировка

Теорема

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *чётная функция, такая, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$;

Верхняя оценка: почти-формулировка

Теорема

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— чётная функция, такая, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$*;*
- $\widehat{f}(u) \geq 0$ *при всех* u*.*

Верхняя оценка: почти-формулировка

Теорема

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— чётная функция, такая, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$;
- $\widehat{f}(u) \geq 0$ *при всех* u.

Тогда для любой решётки Λ *в* $\mathbb{R}^n$ *ее плотность не превосходит*

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Верхняя оценка: почти-формулировка

Теорема

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— чётная функция, такая, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$*;*
- $\widehat{f}(u) \geq 0$ *при всех* u*.*

Тогда для любой решётки Λ *в* $\mathbb{R}^n$ *ее плотность не превосходит*

$$\rho(\Lambda) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Замечание

Усредняя по всевозможным вращениям, можно с самого начала считать, что функция $f(v)$ зависит только от радиуса $|v|$.

Верхняя оценка: все упаковки

Теорема (Д. Горбачев, 2000; H. Cohn, N. Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая сферически-симметричная функция, что:*

Верхняя оценка: все упаковки

Теорема (Д. Горбачев, 2000; H. Cohn, N. Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая сферически-симметричная функция, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$;

Верхняя оценка: все упаковки

Теорема (Д. Горбачев, 2000; H. Cohn, N. Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая сферически-симметричная функция, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$;
- $\widehat{f}(u) \geq 0$ *при всех* u.

Верхняя оценка: все упаковки

Теорема (Д. Горбачев, 2000; H. Cohn, N. Elkies, 2001)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— такая сферически-симметричная функция, что:*

- $f(v) \leq 0$ *при* $|v| \geq 1$*;*
- $\widehat{f}(u) \geq 0$ *при всех* u*.*

Тогда для любой упаковки $\mathcal{C}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *ее плотность не превосходит*

$$\rho(\mathcal{C}) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K.

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Действительно, при стремлении размера куба K к бесконечности отношение в левой части стремится к $\rho(\mathcal{C})$.

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Действительно, при стремлении размера куба K к бесконечности отношение в левой части стремится к $\rho(\mathcal{C})$.
Пусть Λ — решётка, для которой K — фундаментальный параллелепипед.

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Действительно, при стремлении размера куба K к бесконечности отношение в левой части стремится к $\rho(\mathcal{C})$.
Пусть Λ — решётка, для которой K — фундаментальный параллелепипед. Тогда

$$X := \mathcal{C}_K + \Lambda =$$

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \le \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Действительно, при стремлении размера куба K к бесконечности отношение в левой части стремится к $\rho(\mathcal{C})$.
Пусть Λ — решётка, для которой K — фундаментальный параллелепипед. Тогда

$$X := \mathcal{C}_K + \Lambda = \bigcup_{v \in \mathcal{C}_K} (\Lambda + v)$$

упаковка в $\mathbb{R}^n$, являющаяся объединением сдвигов Λ,

Доказательство: приближение объединением решеток

Пусть задана какая-то упаковка $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный (большой) куб K и пусть $\mathcal{C}_K$ — множество центров шаров, целиком содержащихся в K. Достаточно доказать следующую оценку:

Лемма

$$\frac{\#\mathcal{C}_K}{\mathrm{vol}(K)} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Действительно, при стремлении размера куба K к бесконечности отношение в левой части стремится к $\rho(\mathcal{C})$.

Пусть Λ — решётка, для которой K — фундаментальный параллелепипед. Тогда

$$X := \mathcal{C}_K + \Lambda = \bigcup_{v \in \mathcal{C}_K} (\Lambda + v)$$

упаковка в $\mathbb{R}^n$, являющаяся объединением сдвигов Λ, и ее плотность равна $\#\mathcal{C}_K / \mathrm{vol}(K)$.

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1:

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u-v+w).$$

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u - v + w).$$

С одной стороны, она не больше $N \cdot f(0)$, где $N := \#\mathcal{C}_K$.

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u-v+w).$$

С одной стороны, она не больше $N \cdot f(0)$, где $N := \#\mathcal{C}_K$. С другой,

$$S = \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \frac{1}{\operatorname{covol}\Lambda} \sum_{w\in\Lambda^*} e^{2\pi i\langle u-v,w\rangle} \widehat{f}(w)$$

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u-v+w).$$

С одной стороны, она не больше $N \cdot f(0)$, где $N := \#\mathcal{C}_K$. С другой,

$$S = \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \frac{1}{\operatorname{covol}\Lambda} \sum_{w\in\Lambda^*} e^{2\pi i\langle u-v,w\rangle} \widehat{f}(w)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{vol} K} \sum_{w\in\Lambda^*} \widehat{f}(w) \cdot \left\langle \sum_{v\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle v,w\rangle}, \sum_{u\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle u,w\rangle} \right\rangle$$

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u - v + w).$$

С одной стороны, она не больше $N \cdot f(0)$, где $N := \#\mathcal{C}_K$. С другой,

$$S = \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \frac{1}{\operatorname{covol}\Lambda} \sum_{w\in\Lambda^*} e^{2\pi i\langle u-v,w\rangle} \widehat{f}(w)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{vol} K} \sum_{w\in\Lambda^*} \widehat{f}(w) \cdot \left\langle \sum_{v\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle v,w\rangle}, \sum_{u\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle u,w\rangle} \right\rangle$$

Доказательство: Пуассоном по объединению

«Проверим», что все попарные расстояния не меньше 1: рассмотрим величину

$$S := \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \sum_{w\in\Lambda} f(u-v+w).$$

С одной стороны, она не больше $N \cdot f(0)$, где $N := \#\mathcal{C}_K$. С другой,

$$S = \sum_{u,v\in\mathcal{C}_K} \frac{1}{\operatorname{covol}\Lambda} \sum_{w\in\Lambda^*} e^{2\pi i\langle u-v,w\rangle} \widehat{f}(w)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{vol} K} \sum_{w\in\Lambda^*} \widehat{f}(w) \cdot \left\langle \sum_{v\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle v,w\rangle}, \sum_{u\in\mathcal{C}_k} e^{2\pi i\langle u,w\rangle} \right\rangle$$

$$\geq \frac{1}{\operatorname{vol} K} \widehat{f}(0) \cdot N^2.$$

Окончание доказательства

Итак, $N \cdot f(0) \geq S \geq \frac{1}{\operatorname{vol} K} \widehat{f}(0) \cdot N^2$,

Окончание доказательства

Итак, $N \cdot f(0) \geq S \geq \frac{1}{\mathrm{vol}\, K} \widehat{f}(0) \cdot N^2$, значит,

$$\frac{N}{\mathrm{vol}\, K} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

Окончание доказательства

Итак, $N \cdot f(0) \geq S \geq \frac{1}{\mathrm{vol}\, K} \widehat{f}(0) \cdot N^2$, значит,

$$\frac{N}{\mathrm{vol}\, K} \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}.$$

$\square$

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса.*

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *с* $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *с* $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

- $f(v) = 0$ *для любого* $v \in \Lambda \setminus \{0\}$,

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *с* $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

- $f(v) = 0$ *для любого* $v \in \Lambda \setminus \{0\}$,
- $\widehat{f}(u) = 0$ *для любого* $u \in \Lambda^* \setminus \{0\}$,

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *с* $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

- $f(v) = 0$ *для любого* $v \in \Lambda \setminus \{0\}$,
- $\widehat{f}(u) = 0$ *для любого* $u \in \Lambda^* \setminus \{0\}$,

то Λ *— плотнейшая упаковка в* $\mathbb{R}^n$

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *с* $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

- $f(v) = 0$ *для любого* $v \in \Lambda \setminus \{0\}$,
- $\widehat{f}(u) = 0$ *для любого* $u \in \Lambda^* \setminus \{0\}$,

то Λ *— плотнейшая упаковка в* $\mathbb{R}^n$ *(не только среди решёток!).*

Оптимальные функции

Теорема

Пусть сферически-симметричная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы Кона-Элкиса. Если для некоторой решётки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ с $d_{\min}(\Lambda) \geq 1$

- $f(v) = 0$ *для любого* $v \in \Lambda \setminus \{0\}$,
- $\widehat{f}(u) = 0$ *для любого* $u \in \Lambda^* \setminus \{0\}$,

то Λ — плотнейшая упаковка в $\mathbb{R}^n$ (не только среди решёток!).

Определение

Функция f, удовлетворяющая условиям теоремы выше, называется оптимальной.

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v)$$

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u)$$

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) = \rho(\Lambda)\cdot\widehat{f}(0).$$

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) = \rho(\Lambda)\cdot\widehat{f}(0).$$

Значит, $\rho(\Lambda) = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$.

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v \in \Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u \in \Lambda^*} \widehat{f}(u) = \rho(\Lambda) \cdot \widehat{f}(0).$$

Значит, $\rho(\Lambda) = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$. А тогда для любой упаковки X в $\mathbb{R}^n$ с $d_{\min}(X) \geq 1$

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) = \rho(\Lambda)\cdot \widehat{f}(0).$$

Значит, $\rho(\Lambda) = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$. А тогда для любой упаковки X в $\mathbb{R}^n$ с $d_{\min}(X) \geq 1$

$$\rho(X) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$$

Доказательство

Доказательство.

Оба неравенства в доказательстве теоремы Кона-Элкиса в применении к Λ обращаются в равенство:

$$f(0) = \sum_{v\in\Lambda} f(v) = \rho(\Lambda) \sum_{u\in\Lambda^*} \widehat{f}(u) = \rho(\Lambda)\cdot\widehat{f}(0).$$

Значит, $\rho(\Lambda) = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$. А тогда для любой упаковки X в $\mathbb{R}^n$ с $d_{\min}(X) \geq 1$

$$\rho(X) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} = \rho(\Lambda).$$

$\square$

Сферическая симметрия

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ сферически-симметричной функции f сферически-симметрично.

Сферическая симметрия

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ сферически-симметричной функции f сферически-симметрично. Поэтому "можно" писать $f(r)$ и $\widehat{f}(r)$, где $r = |v|$.

Сферическая симметрия

Преобразование Фурье $\widehat{f}$ сферически-симметричной функции f сферически-симметрично. Поэтому “можно” писать $f(r)$ и $\widehat{f}(r)$, где $r = |v|$.

$\widehat{f}(r)$ это не одномерное преобразование Фурье функции $f(r)$!

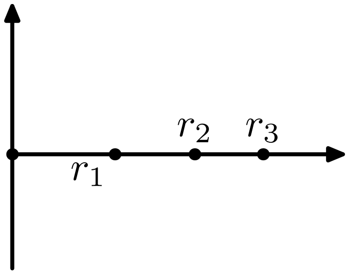
Оптимальные функции: свойства

Пусть

Оптимальные функции: свойства

Пусть

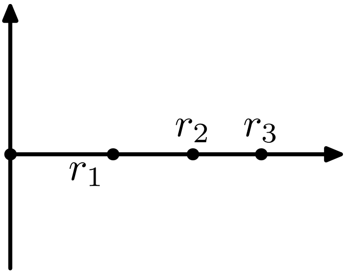
- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,

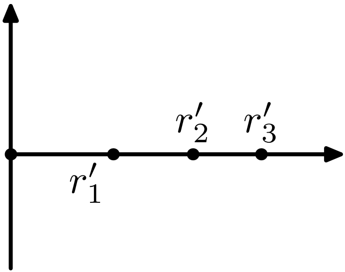


Оптимальные функции: свойства

Пусть

- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и

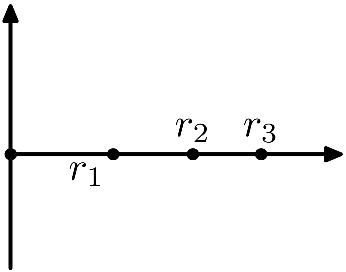




Оптимальные функции: свойства

Пусть

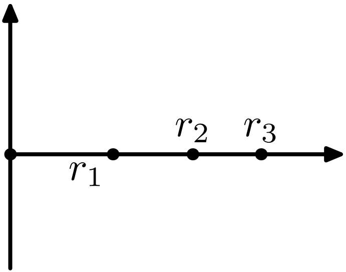
- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \ldots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и
- f оптимальна.

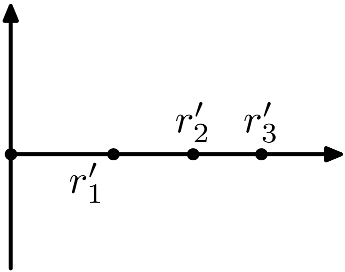


Оптимальные функции: свойства

Пусть

- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и
- f оптимальна. Естественно ожидать, что



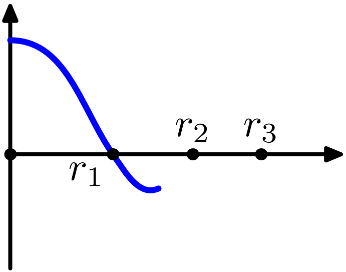


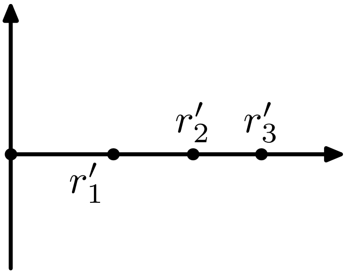
Оптимальные функции: свойства

Пусть

- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и
- f оптимальна. Естественно ожидать, что

- У $f(r)$ ноль первого порядка в r_1,

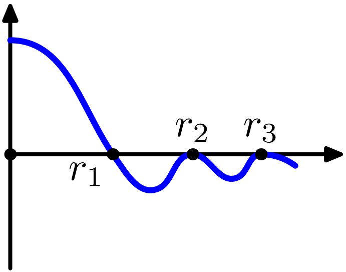


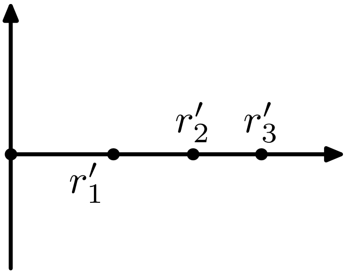


Оптимальные функции: свойства

Пусть

- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и
- f оптимальна. Естественно ожидать, что
- У $f(r)$ ноль первого порядка в r_1, и второго в $r_2, r_3, \dots$



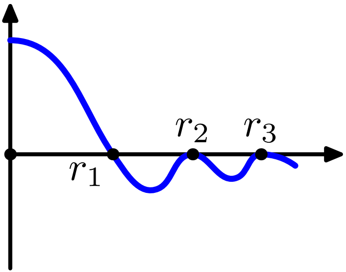


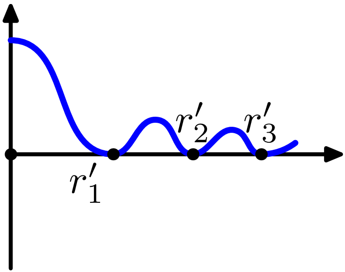
Оптимальные функции: свойства

Пусть

- $1 = r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ,
- $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$ — длины ненулевых векторов Λ^*, и
- f оптимальна. Естественно ожидать, что

- У $f(r)$ ноль первого порядка в r_1, и второго в $r_2, r_3, \dots$
- У функции $\widehat{f}(r)$ ноль второго порядка в каждой из точек $r'_1, r'_2, \dots$





Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

$\frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}$ *Тогда*

$$f(x) = \begin{cases} |1 - |x||, & |x| \leq 1, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

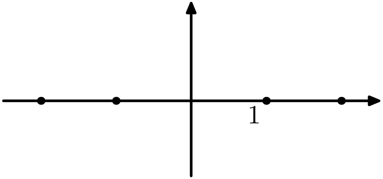
Пусть $\widehat{f}(x) :=$

Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

Пусть $\widehat{f}(x) :=$

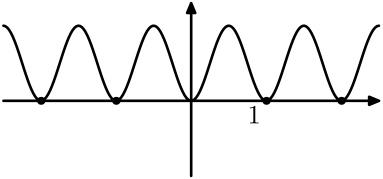


Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

Пусть $\widehat{f}(x) :=$

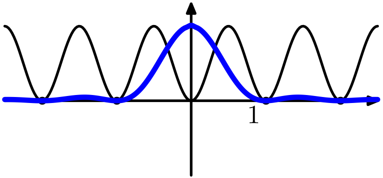


Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

Пусть $\widehat{f}(x) := \frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}$.



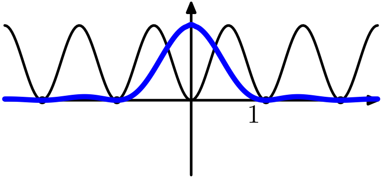
Оптимальные функции: примеры

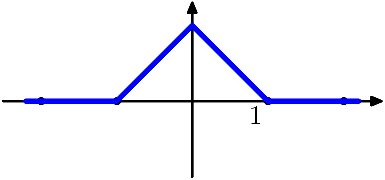
Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

Пусть $\widehat{f}(x) := \frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}$. *Тогда*

$$f(x) = \begin{cases} |1 - |x||, & |x| \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$





Оптимальные функции: примеры

Оценим максимальную плотность упаковки на прямой.

Предложение

Пусть $\widehat{f}(x) := \frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2}$. *Тогда*

$$f(x) = \begin{cases} |1 - |x||, & |x| \le 1, \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Следствие

$\mathbb{Z}$ — *плотнейшая упаковка на прямой!*

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое,

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ *— сферически симметричная функция,*

▶

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен.

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$,

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Доказательство.

- $\widehat{e^{-\pi r^2}} = e^{-\pi r^2}$.

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Доказательство.

- $\widehat{e^{-\pi r^2}} = e^{-\pi r^2}$.
- Преобразование Фурье превращает дифференцирование в умножение на координату и обратно.

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Доказательство.

- $\widehat{e^{-\pi r^2}} = e^{-\pi r^2}$.
- Преобразование Фурье превращает дифференцирование в умножение на координату и обратно.

□

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Доказательство.

- $\widehat{e^{-\pi r^2}} = e^{-\pi r^2}$.
- Преобразование Фурье превращает дифференцирование в умножение на координату и обратно.

$\square$

Теорема (Cohn, Kumar, 2009; Cohn, Miller, 2016)

Решётка E_8 очень-очень близка к оптимальной упаковке.

Оптимальные функции и оценки: примеры-2

Предложение

Пусть n любое, $f(r) = P(r^2)e^{-\pi r^2}$ — сферически симметричная функция, P — многочлен. Тогда $\widehat{f}(r) = Q(r^2)e^{-\pi r^2}$, Q — многочлен.

Доказательство.

- $\widehat{e^{-\pi r^2}} = e^{-\pi r^2}$.
- Преобразование Фурье превращает дифференцирование в умножение на координату и обратно.

$\square$

Теорема (Cohn, Kumar, 2009; Cohn, Miller, 2016)

Решётка E_8 очень-очень близка к оптимальной упаковке.

Идея доказательства: Поиск функций вида $P(r^2)e^{-\pi r^2}$ с заданными нулями P и Q.

Теорема Марины Вязовской

Теорема (М. Вязовска, март 2016)

Существует оптимальная функция f *для решетки Коркина-Золотарева* E_8.

Теорема Марины Вязовской

Теорема (М. Вязовска, март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Коркина-Золотарева E_8. Тем самым, решётка E_8 является плотнейшей возможной упаковкой шаров в восьмимерном пространстве.

Теорема Марины Вязовской

Теорема (М. Вязовска, март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Коркина-Золотарева E_8. Тем самым, решётка E_8 является плотнейшей возможной упаковкой шаров в восьмимерном пространстве.

Доказательство.

Эта функция предъявляется явно, как преобразование Лапласа от некоторой модулярной формы. □

Теорема Марины Вязовской

Теорема (М. Вязовска, март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Коркина-Золотарева E_8. Тем самым, решётка E_8 является плотнейшей возможной упаковкой шаров в восьмимерном пространстве.

Доказательство.

Эта функция предъявляется явно, как преобразование Лапласа от некоторой модулярной формы. □

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича.

Тем самым, решётка Лича является плотнейшей возможной упаковкой шаров в 24-мерном пространстве.

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича. Это — четная самодвойственная решётка с $d_{\min} = 2$

Тем самым, решётка Лича является плотнейшей возможной упаковкой шаров в 24-мерном пространстве.

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича. Это — четная самодвойственная решётка с $d_{\min} = 2$ (а не $\sqrt{2}$!).

Тем самым, решётка Лича является плотнейшей возможной упаковкой шаров в 24-мерном пространстве.

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича. Это — четная самодвойственная решётка с $d_{\min} = 2$ (а не $\sqrt{2}$!).

Теорема (H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska; март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Лича.

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича. Это — четная самодвойственная решётка с $d_{\min} = 2$ (а не $\sqrt{2}$!).

Теорема (H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska; март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Лича. Тем самым, решётка Лича является плотнейшей возможной упаковкой шаров в 24-мерном пространстве.

$n = 24$: решётка Лича

В 24-мерном пространстве есть исключительно красивая и симметричная решётка Лича. Это — четная самодвойственная решётка с $d_{\min} = 2$ (а не $\sqrt{2}$!).

Теорема (H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska; март 2016)

Существует оптимальная функция f для решетки Лича. Тем самым, решётка Лича является плотнейшей возможной упаковкой шаров в 24-мерном пространстве.

Доказательство.

Эта функция предъявляется явно, как преобразование Лапласа от некоторой модулярной формы. □

(Резерв)

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка.

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция $\theta_\Lambda : \Pi_+ := \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\} \to \mathbb{C}$,

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция $\theta_\Lambda : \Pi_+ := \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\} \to \mathbb{C}$,

$$\theta_\Lambda(\tau) = \sum_{v \in \Lambda} e^{\pi i \tau \cdot |v|^2}.$$

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция $\theta_\Lambda : \Pi_+ := \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\} \to \mathbb{C}$,

$$\theta_\Lambda(\tau) = \sum_{v \in \Lambda} e^{\pi i \tau \cdot |v|^2}.$$

Это — производящая функция для количества векторов $v \in \Lambda$ с данной половиной квадрата длины,

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция $\theta_\Lambda : \Pi_+ := \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\} \to \mathbb{C}$,

$$\theta_\Lambda(\tau) = \sum_{v \in \Lambda} e^{\pi i \tau \cdot |v|^2}.$$

Это — производящая функция для количества векторов $v \in \Lambda$ с данной половиной квадрата длины,

$$\theta_\Lambda(q) = \sum_{v \in \Lambda} q^{|v|^2/2},$$

Тэта-функции

Определение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная решётка. Её тэта-функцией называется функция $\theta_\Lambda : \Pi_+ := \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\} \to \mathbb{C}$,

$$\theta_\Lambda(\tau) = \sum_{v \in \Lambda} e^{\pi i \tau \cdot |v|^2}.$$

Это — производящая функция для количества векторов $v \in \Lambda$ с данной половиной квадрата длины,

$$\theta_\Lambda(q) = \sum_{v \in \Lambda} q^{|v|^2/2},$$

записанная в "координатах" $q = e^{2\pi i \tau}$.

Теорема о модулярности

Теорема

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — четная самодвойственная решётка. Тогда

$$\frac{1}{\tau^{n/2}}\,\theta_\Lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \theta_\Lambda(\tau).$$

для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^{n/2}}\,\theta_\Lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta_\Lambda(\tau)$$

Теорема о модулярности

Теорема

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— четная самодвойственная решётка. Тогда*

$$\frac{1}{\tau^{n/2}}\,\theta_\Lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \theta_\Lambda(\tau).$$

Следствие

Тэта-функция такой решетки — модулярная:

Теорема о модулярности

Теорема

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — *четная самодвойственная решётка. Тогда*

$$\frac{1}{\tau^{n/2}}\,\theta_\Lambda(-\frac{1}{\tau}) = \theta_\Lambda(\tau).$$

Следствие

Тэта-функция такой решетки — *модулярная*: *для любой матрицы* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ *выполнено*

$$\frac{1}{(c\tau + d)^{n/2}}\,\theta_\Lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \theta_\Lambda(\tau)$$

Теорема о модулярности

Теорема

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— четная самодвойственная решётка. Тогда*

$$\frac{1}{\tau^{n/2}}\,\theta_\Lambda(-\frac{1}{\tau}) = \theta_\Lambda(\tau).$$

Следствие

Тэта-функция такой решетки — модулярная: для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ *выполнено*

$$\frac{1}{(c\tau+d)^{n/2}}\,\theta_\Lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta_\Lambda(\tau)$$

Идея доказательства: формула суммирования Пуассона!

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta(\tau)$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta(\tau)$$

$$\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)' = \frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau + d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \theta(\tau)$$

$$\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)' = \frac{1}{(c\tau + d)^2}.$$

$$\theta(\tau)(d\tau)^{k/2} =$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta(\tau)$$

$$\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)' = \frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

$$\theta(\tau)(d\tau)^{k/2} = \frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(d\tau)^{k/2}$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

$$\theta(\tau)\color{red}{(d\tau)^{k/2}} = \color{blue}{\frac{1}{(c\tau+d)^k}}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\color{red}{(d\tau)^{k/2}}$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta(\tau)$$

$$d\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{1}{(c\tau+d)^2}\,d\tau.$$

$$\theta(\tau)(d\tau)^{k/2} = \frac{1}{(c\tau+d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(d\tau)^{k/2}$$

Модулярные формы

Определение

Функция $\theta : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ — модулярная форма веса k, если для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{Z})$ выполнено

$$\frac{1}{(c\tau + d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \theta(\tau)$$

$$d\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{1}{(c\tau + d)^2}\,d\tau.$$

$$\theta(\tau)(d\tau)^{k/2} = \frac{1}{(c\tau + d)^k}\,\theta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(d\tau)^{k/2}$$

$$= \theta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\left(d\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\right)^{k/2}$$

Модулярные формы-2

Поэтому $\theta(\tau) \cdot (d\tau)^{k/2}$ — корректно определенная “форма” на модулярной кривой

Модулярные формы-2

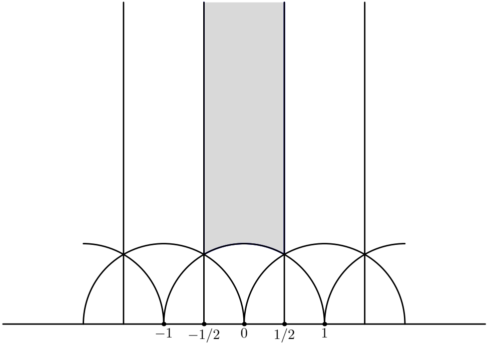
Поэтому $\theta(\tau) \cdot (d\tau)^{k/2}$ — корректно определенная "форма" на модулярной кривой

$$\mathcal{M} := \Pi_+/PSL(2, \mathbb{Z}).$$

Модулярные формы-2

Поэтому $\theta(\tau)\cdot(d\tau)^{k/2}$ — корректно определенная "форма" на модулярной кривой

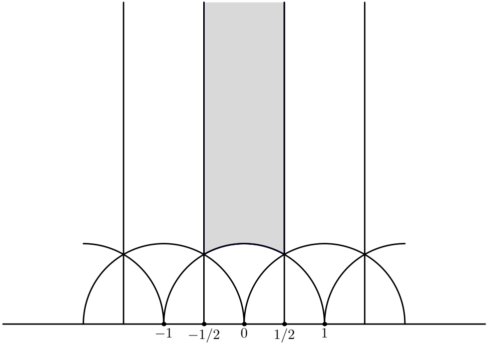
$$\mathcal{M} := \Pi_+/PSL(2,\mathbb{Z}).$$



Модулярные формы-2

Поэтому $\theta(\tau) \cdot (d\tau)^{k/2}$ — корректно определенная "форма" на модулярной кривой

$$\mathcal{M} := \Pi_+ / PSL(2, \mathbb{Z}).$$



Спасибо за внимание!