Цепи Маркова. Листок 3

А. И. Буфетов, Я. М. Наприенко

Рассмотрим такую непрерывную функцию $f(t)$, что $f(t) < Me^{at}$ для каких-то $M, a \in \mathbb{R}$. Такие функции называются функциями экспоненциального вида. Определим преобразование Лапласа функции $f(t)$ по следующей формуле

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Благодаря ограничению на рост функции $f(t)$ преобразование Лапласа определено для $s > a$ ($Re(s) > a$).

Возникает естественный вопрос: могут ли разные функции экспоненциального вида $f(t)$ и $g(t)$ иметь одно и то же преобразование Лапласа, то есть для любого $s > a$:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

или, что эквивалентно, $\mathcal{L}(f - g)(s) = 0$.

Для доказательства, что такого быть не может, нам потребуется небольшая лемма, которая и будет первой задачей:

Задача 1. Если функция $h(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и для любого $n = 0, 1, \ldots$ выполняется равенство $\int_0^1 h(t) t^n = 0$, то $h(t) = 0$.

Теперь мы можем доказать теорему, которая тоже оказывается задачей:

Задача 2. Для функции экспоненциального вида $f(t)$ с параметрами M, a пусть выполнено $\mathcal{L}f(s) = 0$ для всех $s > a$, то есть

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = 0$$

Тогда $f(t) = 0$. Подсказка: рассмотрите подходящую замену переменных в точке $s = s_0 + n + 1$ для фиксированного $s_0 > a$, чтобы свести к доказанной лемме.

Задача 3. Докажите основные свойства преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n (\mathcal{L}f(s))^{(n)}$$

$$\mathcal{L}(f(t)^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - a)$$

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r) g(t - r) dr\right)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)h(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}f(s),$$

где

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

Задача 4. Найдите преобразование Лапласа от функций t^n, e^{at}, $\sin(at)$, $\cos(at)$

Задача 5. Найдите обратное преобразование функций $\frac{3!}{s^4}$, $\frac{3!}{(s-2)^4}$, $\frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

Иначе говоря, преобразование Лапласа каких функций дадут перечисленные выше?

Задача 6. Пользуясь преобразованием Лапласа, обратным преобразованием и его свойствами, решите дифференциальное уравнение

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Задача 7. То же самое для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + y = sin(2t)$$

Задача 8. Найдите какую-нибудь собственную функцию преобразования Лапласа, то есть такую функцию $f(t)$, что для какого-то λ верно

$$\mathcal{L}f(s) = \lambda f(s)$$