ПЕСОЧНАЯ МОДЕЛЬ: ЗАДАЧИ

Никита Калинин

26 июля 2017 г.

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЯМ. Этот текст будет редактироваться. Актуальная версия находится на `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/misc/sand.html`. Текст может появиться в виде брошюры если найдутся люди, готовые мне помогать: написать решения задач, вычитывать, давать советы по структуре. Все замечания, указания на неточности, просьбы переписать понятно, предложения добавить тот или иной материал можно направлять мне на почту (nikaanspb на gmail.com). Также я доступен для ответов на вопросы в телеграме, вконтакте и скайпе. Я с удовольствием обсужу с вами всё что касается песков и почему единица выглядит так как она выглядит (и любые другие вопросы).

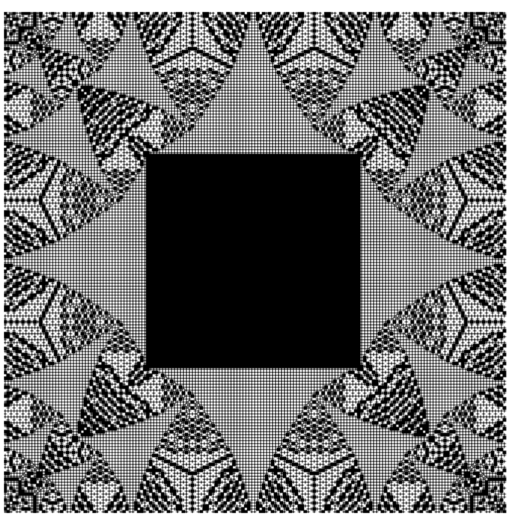
Аннотация

В задачах собран материал, покрывающий мне нравящуюся часть науки про пески. Что-то является частью общей математической культуры – дискретные гармонические функции, функция Грина; что-то является классикой в песках – песочная группа, свойства функции обвалов. Почему единица песочной группы выглядит так как она выглядит – на мой взгляд, самый интересный вопрос.

Поэтому представлены результаты, проясняющие отдельные аспекты этого вопроса. Этот текст стоит читать параллельно с текстом “ПЕСОЧНАЯ МОДЕЛЬ В ФИЗИКЕ, КОМБИНАТОРИКЕ, ТРОПИЧЕСКОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ”.

Описываемые методы песочной науки вполне школьные, как может убедиться читатель. Значит, и открытые проблемы, представленные здесь, по силам мотивированному читателю.

1 Главные открытые проблемы



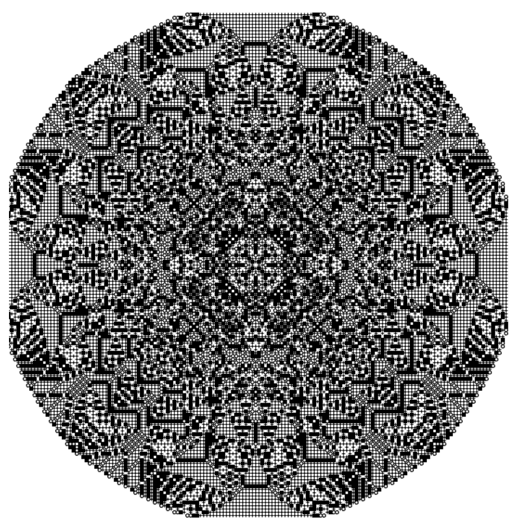


Рис. 1: Слева: так выглядит единица песочной группы для большого квадрата. Докажите про неё хоть что-нибудь. Справа: так выглядит $(n\delta_{(0,0)})^{\circ}$. Найдите форму ограничивающей кривой. Это двенадцатиугольник?

Интересная задача найти единицу для других графов, которые получаются как пересечение выпуклой области с $\mathbb{Z}^2$.

Корректность, запрещённые состояния

1. Докажите что на конечном графе любая релаксация заканчивается за конечное число шагов.

2. Докажите, что любые две релаксации одного состояния (как последовательности вершин где происходят обвалы), отличаются перестановкой порядка операций. Иными словами: для любой вершины v число обвалов в v совпадает в обеих релаксациях.

3. * Докажите, что функция обвалов F для состояния ϕ удовлетворяет следующему свойству. Рассмотрим множество A функций $G : \Gamma \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяющих $\phi + \Delta G \leq 3$ (поточечно). Тогда для любой вершины $v \in \Gamma$ имеем

$$F(v) = \min\{G(v)|G \in A\}.$$

4. Докажите, что возвратное состояние не может содержать запрещённой конфигурации. (Напомним, *запрещённая конфигурация* ϕ на подграфе $D \subset \Gamma$, это когда для любой вершины v выполняется $\phi(v) < deg_D(v)$, то есть число песчинок в v строго меньше степени v в D. Пример: две соседние вершины, в обеих ноль песчинок – это запрещённая конфигурация.)

5. Докажите, что если состояние ϕ можно получить как $(3+\psi)^\circ$ для некоторого неотрицательного ψ, то для любого состояния γ существует неотрицательное ψ такое что $\phi = (\gamma + \psi)^\circ$.

Конечный коммутативный моноид содержит группу. Будет кратно объяснено, спрашивайте вне лекции.

Конечным коммутативным моноидом называется множество M с операцией $\oplus : M \times M \to M$ (мы записываем это как $(a, b) \to a \oplus b$), которая удовлетворяет следующим свойствам:

- $a \oplus b = b \oplus a$ для всех $a, b \in M$,
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ для всех $a, b, c \in M$,
- наличествует тождественный элемент e, то есть $a \oplus e = a$ для всех a.

Основной пример: **песочный моноид**. Расмотрим множество **всех** стабильных (=негде делать обвал) состояний песочной модели. $\oplus$ будет поточечным сложением с последующей релаксацией. e будет элементом, который тождественно равен нулю во всех вершинах графа.

Идеалом коммутативного моноида M называется любое такое непустое подмножество $I \subset M$, что $\forall x \in M, x \oplus I \subset I$, то есть $\{x + a|a \in I\} \subset I$.

6. Докажите, что пересечение а)двух, б)любого количества идеалов – идеал.

7. Докажите, что *минимальный* идеал I в M, то есть пересечение **всех** идеалов M – это группа. Подсказка: сначала докажите, что для любых $a, b \in I$ существует такие $x, y \in M$ что $ax = b, by = a$.

8. Докажите, что множество возвратных состояний песочной модели – это минимальный идеал песочного моноида.

Из этого следует что множество возвратных состояний – группа.

В направлении единицы

9. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ конечное множество. Рассмотрим песочную динамику на Γ. Пусть ϕ будет состоянием, которое во всех точках равно 8. Докажите, что $(\phi - \phi^\circ)^\circ$ является нейтральным элементом (единицей) в песочной группе.

Единицей Крейца β мы назовём состояние, которое в каждой вершине равно количеству рёбер из неё в стоки. Например, для графа $\Gamma = [0, n] \times [0, m] \cap \mathbb{Z}^2$, его граница $\partial\Gamma$ (она же стоки) это объединение сторон прямоугольника. Таким образом, β равна 2 в углах $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, равна 1 вдоль сторон $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ и нулю иначе. Символически это как-то так записывается: $\beta(1, 1) = \beta(n-1, 1) = \beta(1, m-1) = \beta(n-1, m-1) = 2, \beta(1, i) = \beta(n-1, i) = 1$ для $1 < i < m-1$, $\beta(j, 1) = \beta(j, m-1) = 1$ для $1 < j < n-1$ и $\beta(i, j) = 0$ иначе.

10. Докажите, что для состояния ϕ выполнено $(\phi+\beta)^\circ = \phi$ тогда и только тогда, когда ϕ не содержит запрещённых конфигураций.

11. Докажите, что для состояния ϕ выполнено $(\phi+\beta)^\circ = \phi$ тогда и только тогда, когда ϕ – возвратное.

12. Докажите, что $\phi = \langle 2 \rangle$ – возвратное состояние.

13. Докажите, что если $\phi \geq \psi$ во всех точках, то во всех точках, где произойдёт обвал во время релаксации ψ, произойдёт обвал и в релаксации ϕ.

Рассмотрим $\Gamma = [0,n] \times [0,m]$ где n сильно меньше чем m. Заметим, что $\phi = ((n^2+n)\beta)^\circ$ эквивалентно единице в песочной группе.

14. Докажите, что ϕ–возвратное состояние (из этого следует что оно равно единице E группы). Рекомендуется для этого сделать $F(i,k) = (n-k)^2 + (n-k)$ обвалов во всех точках (i,k). Докажите, что если сделать такое количество обвалов, то во всех точках Γ кроме правого и левого столбца у нас будет две песчинки, то есть $\phi + \Delta F$ почти везде равно двойке.

Состояние, полученное в предыдущем упражнении симметрично. Надо доказать, что обвалы песка со сторон не зайдут далеко в центр. Делается это так.

15. Рассмотрим состояние ψ на Γ которое на левой стороне равно $n(n+1)+2$ а всё остальное двойки. Докажите, что $\psi \geq \phi + \Delta F$. В каждой вершине $(i,j), i \leq X$ сделаем $G(i,j) = (X-i)(X-i+9)/2$ обвалов, где $X = [n\sqrt{2}]$. Покажите что $\psi + \Delta G \leq 3$.

Значит, $E = (\phi)^\circ = (\phi + \Delta F)^\circ$, и релаксация последнего поточечно не больше релаксации ψ, которая затрагивает только регион порядка X около левого и правого столбца.

16. Докажите, что если $(2\phi)^\circ = \phi$ для состояния $\phi \neq \langle 0 \rangle$, то ϕ – это единица группы.

17. Рассмотрим квадратную матрицу A лапласа графа Γ. Каждой вершине $v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ соответствует строка и столбец в A. В клетке (v,v) матрицы стоит $deg(v)$, степень вершины v. В клетках (v,w) матрицы стоит количество рёбер между v и w. Пусть E единица группы. Докажите, что $A^{-1}E$ – целочисленный вектор.

18. Для графа $\Gamma = [0,5] \times [0,10000] \cap \mathbb{Z}^2$ единица песочной группы Γ на $[0,5] \times [100,9900]$ равна тождественно 2.

19. Возьмём граф $\Gamma = [0,n] \times [0,m] \cap \mathbb{Z}^2$ и отождествим вершины $(0,k),(n,k)$ для всех k (получилось кольцо). Тогда единица песочной группы Γ равна тождественно 3 если m чётно, и везде 3 и полоску из 2 если m нечётно.

Дискретные гармонические функции

Дискретным лапласианом функции $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется функция ΔF, определяемая как

$$(\Delta F)(x,y) = F(x+1,y) + F(x-1,y) + F(x,y+1) + F(x,y-1) - 4F(x,y).$$

20. Найдите ΔF где $F(i,j)$ а) линейная, б) $\frac{1}{2}(i(i+1)+j(j+1))$, в) $\left\lceil \frac{1}{3}i^2 \right\rceil$, г)$\left\lceil \frac{1}{3}(i^2+4ij+j^2+4i) \right\rceil$, д) $\left\lceil \frac{1}{8}(5i^2+4ij+4j^2+2i+4j) \right\rceil$.

Функция $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется *дискретно-гармонической* если для всех точек $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ выполнено $\Delta F(x,y) = 0$. Функция F называется *ограниченной сверху*, если существует $C \in \mathbb{R}$ такое что $F(x,y) < C$ для всех $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

21. Докажите, что целочисленная ограниченная сверху дискретно-гармоническая функция является константой, т.е. $F(x,y) = c$ для некоторого c и всех $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

22. Докажите, что если F, G – супергармонические функции, то есть $\Delta F, \Delta G \leq 0$ всюду, то $\min(F,G)$ тоже супергармоническая функция.

23. Докажите, что дискретно-гармоническая функция $F : \mathbb{Z}^2 \to [a, b], a, b \in \mathbb{R}$ (то есть ограниченная функция) является константой.

Подсказка: покажите, что её дискретная частная производная $G(x, y) = F(x+1, y) - F(x, y)$ тоже дискретно-гармоническая, и ограниченная. Тогда взяв точку, достаточно близкие к максимуму G и идя от неё, можно получить значения F больше наперёд заданного числа, что является противоречием.

Помочь могут в том числе и следующие две задачи.

24. Пусть $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ дискретно гармоническая. Пусть $a_n(f) = \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}(f(i+n, j) - f(i-n, j))$. Докажите, что $a(n+1) + a(n-1) \geq 2a(n)$.

25. Принцип максимума: дискретно-гармоническая функция на Γ достигает максимума и минимума на $\partial\Gamma$. Секретная версия принципа максимума: для двух положительных дискретно-гармонических функций f, g на Γ, функция f/g достигает максимума на $\partial\Gamma$.

26. *Докажите, что положительная дискретно-гармоническая функция является константой.

27. * * Пусть положительная целочисленная гармоническая функция F удовлетворяет $F(x, y) < ix + jy + C$ на $[0, R] \times [0, R] \cap \mathbb{Z}^2$. Докажите, что для для достаточно большого R из этого следует что F является линейной функцией на $[R/3, 2R/3] \times [R/3, 2R/3] \cap \mathbb{Z}^2$.

Разбиение на волны

На стабильном состоянии ϕ, оператор W_v волны из точки v действует следующим образом. Добавим в v песчинку, произведём обвал в v, если это возможно, вынем из v песчинку, произведём релаксацию.

28. Пусть $\phi = \langle 3 \rangle$ на $\mathbb{Z}^2$. Докажите что $W_v\phi = \phi$ для любой вершины v.

29. Рассмотрим произвольное стабильное состояние ϕ. Докажите, что в процессе $\phi \to W_v\phi$ в каждой вершине графа произошло не более одного обвала.

Фоном называется такое состояние ϕ что для любой вершины v выполнение оператора волны из v не меняет ϕ, то есть $W_v\phi = \phi$. Например, $\phi = \langle 3 \rangle$ на $\mathbb{Z}^2$ является фоном. Если мы в редких точках напишем ноль вместо трёх, то всё равно останется фоном.

30. Открытая проблема (пока не знаю где это доказано). Определить все 2-периодические фоны, то есть такие фоны, для которых существует два неколлинеарных вектора v, v' что $\phi(p) = \phi(p + v) = \phi(p + v')$ для любой точки $p \in \mathbb{Z}^2$.

Кажется, что паттерны, периодичные только в одном направлении, можно склеивать между собой (в ортогональном направлении), поэтому их классификация выглядит более затруднительной.

Функция Грина. Для информации: доказывать сложно.

Полезно когда есть функция F, лапласиан ΔF которой равен нулю везде, кроме одной точки. Имея такую функцию, легко сконструировать решения $\Delta F = G$ для какой-нибудь функции G.

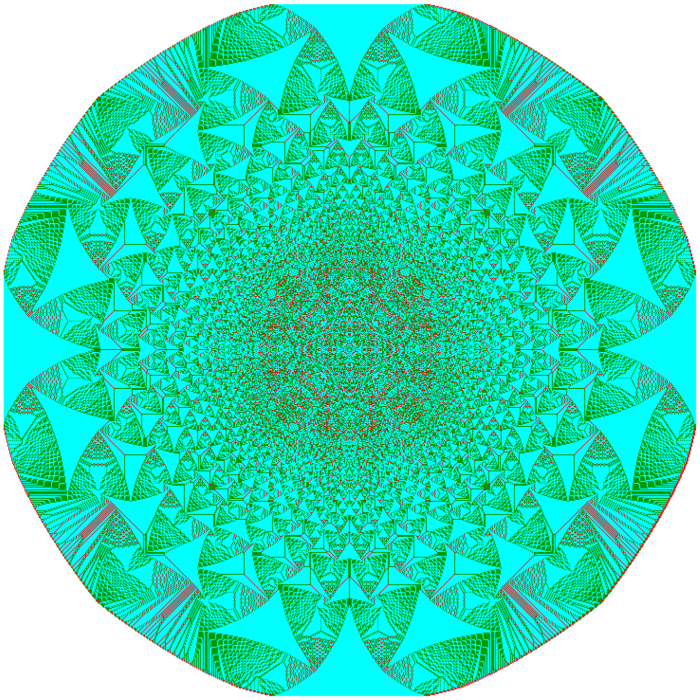
31. * * Докажите, что существует функция $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ такая что $\Delta F(i, j) = 0$ для всех точек $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, кроме $(0, 0)$ где $\Delta F = 1$, кроме того, мы требуем чтобы

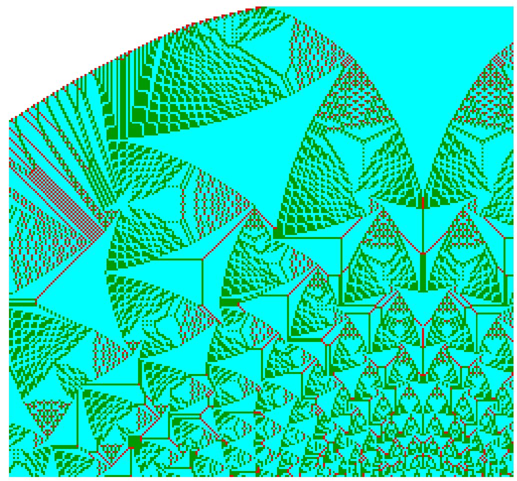
$$F(i, j) = -\frac{1}{\pi}\log(i^2 + j^2) + \kappa + O\left(\frac{1}{i^2 + j^2}\right).$$

Много песка в одну точку

32. (**ВАЖНОЕ**.) Пусть D – подмножество Γ, и состояние ϕ получено релаксацией, в ходе которой во всех вершинах D были обвалы. тогда $\sum_{v\in D}\phi(v)\geq E$, где E – это количество рёбер между вершинами из D.

33. Открытая проблема. Определить граничную кривую $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(n\delta_{(0,0)})^{\circ}$, то есть мы кидаем n песчинок в точку $(0,0)$ на пустой плоскости, производим релаксацию, и делаем гомотетию с коэффициентом $1/\sqrt{n}$. Известно, что получающиеся картинки будут иметь предел. Выглядит это как-то так:





Паттерны, солитоны и бэкграунды

Девиантным множеством $D(\phi)$ состояния ϕ называется множество вершин где $\phi\neq 3$. То есть

$$D(\phi)=\{(i,j)\in\Gamma\|\phi(i,j)\neq 3\}.$$

34. * * Рассмотрим песочное состояние $\phi=\langle 3\rangle$ на полуцилиндре Γ, т.е.

$$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2|px+qy\geq 0\}/\sim$$

где $(x,y)\sim(x',y')$ когда $px+qy=px'+qy'$. Будем насылать волны из точки $v=(x,y)$ которая далеко от края цилиндра. Докажите, что при большом n девиантное множество $D((W_v)^n\phi)$ будет состоять из неподвижного "мусора" около границы цилиндра и "паттерна" который будет после каждой волны сдвигаться на вектор (p',q') такой что $pp'+qq'=1$. Рассмотрите сначала случай $p=1,q=0$.

35. * * Исследуйте все такие $F(i,j)=[ai^2+bij+cj^2+di+ej+k], a,b,c,d,e,k\in\mathbb{R}$, что $0\leq\Delta F\leq 3$.

Замощения плоскости невы обязательно выпуклым кафелем.

36. Классифицировать замощения как у Левина

G_p-динамика на тропических кривых

Задача о муравье Лэнгтона

Каждая клетка плоскости покрашена в чёрный (конечно) или белый цвета. Муравей перемещается с клетки на клетку по следующим правилам: 1) на чёрном: повернуть на 90° налево, перекрасить текущую клетку, пойти прямо. 2) на белом то же самое, но пойти направо. Оказывается, через некоторое время муравей будет повторять одну и ту же последовательность из 104 шагов, независимо от исходной картинки. Почему – никто не знает. Подробности и картинки читайте в википедии.

... упражнения будут появляться ближе к курсу и в течение курса...