

# ПЕСОЧНАЯ МОДЕЛЬ

Никита Калинин\*

14 мая 2020 г.

определение обвала

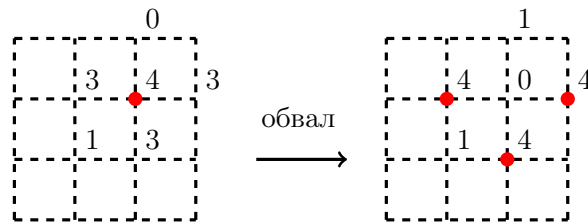


Рис. 1: Вершина на левом рисунке, помеченная жирной точкой, была нестабильной. После того, как мы сделали в ней обвал, три соседние вершины стали нестабильными.

убедитесь в этом экспериментально

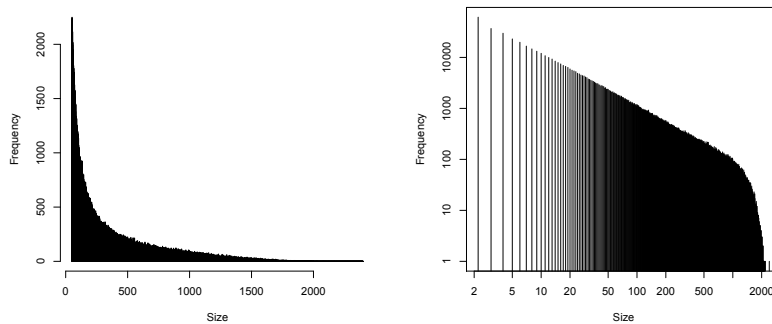


Рис. 2: Гистограмма степенного распределения на обычной шкале (слева) и на двойной логарифмической шкале (справа).

\*Основано на лекциях автора на школе "Современная математика" в Дубне, июль 2017

*”Мой вывод из всех этих примеров состоит в том, что пора вернуться к элементарным объектам экспериментальной математики в преподавании студентам трудных теорий современной математики”*

В.А. Арнольд, Экспериментальная математика.

Эксперименты позволяют догадаться до правильного ответа и открыть неожиданные закономерности. В этой брошюре описывается *песочная модель*, определение которой занимает полстраницы, код, вычисляющий её динамику, занимает максимум пару экранов, но *основные гипотезы в области песочной модели до сих пор не доказаны*.

Читатель увидит упражнения (автор умеет их решать), упражнения со звёздочкой (требующие размышлений), упражнения с двумя звёздочками (зачастую самостоятельные научные результаты, опубликованные в научных журналах) и *открытые вопросы* (автор не умеет на них отвечать, возможно, это неправильные вопросы и нужно выбрать другую точку зрения). Если не получается решить задачу, поймите её условие и пользуйтесь ей как известным утверждением при решении последующих задач.

Вариант прочтения: запрограммируйте модель и получите все феномены из задач экспериментально, и лишь потом доказывайте. На полях можно встретить *комментарии* – и мы рекомендуем читателю писать на полях свои комментарии, ориентироваться на предложенные задачи и открытые вопросы, но не только – задавайте свои вопросы о песочной модели, пробуйте на них отвечать!

... *logarithmic plots are a device of the devil.*  
Charles Francis Richter

Можно ли предсказать землетрясение или обвал валют? Очень сложно, но известно, что частота землетрясений обратно пропорциональна их силе: в середине XX века американские сейсмологи Гутенберг и Рихтер показали, что зависимость между силой (энергией) и количеством землетрясений в определенном регионе описывается степенным законом, т.е. на двойной логарифмической шкале эта зависимость имеет форму прямой (см. Рис. 2). Основная сложность была, конечно, в экспериментальном определении силы землетрясения – энергии, высвободившейся во время землетрясения. Степенные законы появляются в физике повсюду, например, вблизи фазовых переходов, и являются признаком нахождения системы в критическом состоянии.

Система находится в критическом состоянии, если даже небольшое возмущение может привести к глобальным изменениям. Таковы, например, любые фазовые переходы: в воде, охлажденной до нуля градусов, один центр кристаллизации быстро разрастается до большого кластера.

Существуют системы, приводящие сами себя в состояние, близкое к критическому. Показательный пример — землетрясения. Если для замерзания воды необходимо подобрать определенные температуру и давление, то в случае землетрясений никаких специальных параметров нет. Постоянное и медленное движение тектонических плит приводит к накоплению напряжения, но в какой момент произойдет землетрясение, предсказать практически невозможно. Однако частота землетрясений описывается удивительно просто – степенным законом.

Явления, которые обладают подобным признаком позднее были обнаружены в геофизике, космологии, экономике, теории управления риском и других областях. Все они могут быть описаны в рамках теории самоорганизующейся критичности (*self-organized criticality*).

Концепцию самоорганизующейся критичности предложили Бэк, Тэнг и Висенфелд в 1987 году. В своей работе они описали систему, ставшую классической моделью самоорганизующейся критичности: представьте квадратную сетку, в каждом узле которой лежат песчинки. На сетку равномерно падают новые песчинки, в случайной узел. По определению, если в каждом узле не более трёх песчинок, система находится в стабильном состоянии. Но как только в один из узлов падает четвертая песчинка, происходит обвал (см. Рис. 1): четыре песчинки из этого узла перераспределяются на соседние узлы, это может вызвать обвалы в них, потом в их соседях... Обвалы будут лавинообразно происходить до тех пор, пока система вновь не вернется в равновесное состояние. Главное наблюдение физиков, ради

так и появилась шкала Рихтера для землетрясений

ну да, там ещё ренормализация и критические экспоненты

а здесь комментария нет. напишите свой! да, ручкой по бумаге. поля для этого и предназначены

определение песочной модели

до физиков похожая модель появилась в изучении вырождения дивизоров, и в комбинаторике

которого они и придумали эту модель, состояло в том, что размер обвалившейся области подчиняется степенному распределению.

С момента своего появления более 30 лет назад, идеи самоорганизующейся критичности стали популярны и оказали значительное влияние на развитие многих областей наук. Нобелевский лауреат Фил Андерсон в своей знаменитой статье “*More is different*” писал: “В XXI веке одна из происходящих революций — это конструкция обобщений, перемешивающих иерархии, и дающих инвариантность при ремасштабировании. Первое, соответственно, это спонтанное нарушение симметрии, второе — самоорганизующаяся критичность.”

Песочная модель иллюстрирует поведение критических систем исключительно на феноменологическом уровне. С её помощью нельзя ни промоделировать землетрясение, ни предсказать поведение настоящей кучи песка.

[указанную статью лучше прочитать целиком](#)

## Главные открытые проблемы

Изучение раздела математики можно уподобить походу – со всеми его сложностями, плохой или хорошей погодой, удачами, потерей маршрута и красивыми видами. Полезно иметь в виду вершину, к которой мы идём – в случае математики это может быть открытая проблема, на решение которой и направлены попытки предыдущих путешественников, по чьим следам мы идём.

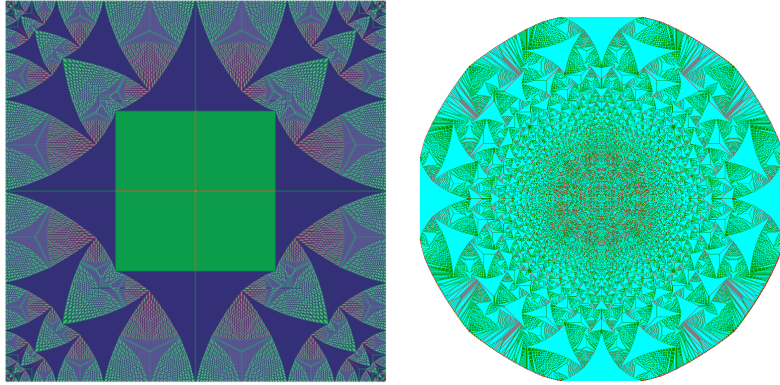


Рис. 3: Слева: так выглядит единица песочной группы для большого квадрата (и стандартной квадратной решётки). Докажите про неё хоть что-нибудь. Справа: так выглядит  $(n\delta_{(0,0)})^\circ$  (тоже для квадратной решётки). Найдите форму ограничивающей кривой. Это двенадцатиугольник? Как описать паттерны на фрактального вида треугольных областях для других решёток, скажем, сделанных из треугольников или шестиугольников?

На квадратной решётке паттерны на треугольных областях описываются с помощью кругов Аполлония! Интересная задача найти единицу для других графов, которые получаются как пересечение выпуклой области с  $\mathbb{Z}^2$ , понять как картинка зависит от области.

см. замечательную брошюру А.А. Кириллова "Повесть о двух фракталах"

## 1 Вводные понятия

### Песочная модель: определения

Рассмотрим граф  $\mathbb{Z}^2$ ; его вершины — это точки плоскости  $(i, j)$ , у которых обе координаты целочисленны, т.е.  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Мы соединяем две вершины ребром, если расстояние между ними равно одному. Степень каждой вер-

граф на котором живёт песок

шины, тем самым, равна четырём. Все графы, рассматриваемые в этой заметке, будут подграфами  $\mathbb{Z}^2$ , если не оговорено противное.

Пусть  $\Gamma$  — граф, являющийся пересечением  $\mathbb{Z}^2$  и квадрата  $[0, N] \times [0, N]$ . Назовём *состоянием* функцию  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  на вершинах графа  $\Gamma$ . Мы интерпретируем  $\phi(i, j)$  как число песчинок (или фишек) в точке  $(i, j) \in \Gamma$ . Если  $\phi(i_0, j_0) \geq 4$ , мы разрешаем сделать *обвал* в точке  $(i_0, j_0)$  и называем эту точку *нестабильной*. В результате обвала в  $(i_0, j_0)$  получается новое состояние  $\phi'$  по следующим правилам:

$$\phi'(i, j) = \begin{cases} \phi(i, j) - 4 & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0); \\ \phi(i, j) + 1 & \text{если } (i, j) \text{ и } (i_0, j_0) \text{ соседи}; \\ \phi(i, j) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Обвал является перераспределением песчинок: каждая из четырёх соседних с  $(i_0, j_0)$  вершин  $\mathbb{Z}^2$  забирает из точки  $(i_0, j_0)$  одну песчинку. Песок, выпадающий за пределы графа  $\Gamma$ , пропадает. Эквивалентно, можно думать, что все вершины из  $\mathbb{Z}^2 \setminus \Gamma$  являются *стоками*, и в стоках мы запрещаем выполнять обвалы. Процесс выполнения обвалов пока это возможно называется *релаксацией*. Состояние  $\phi$  называется *стабильным* если  $\phi(i, j) \leq 3$  для всех  $(i, j) \in \Gamma$ , т.е. ни в одной точке обвал произойти не может. На Рис. 1 показано как один обвал может спровоцировать новые обвалы.

определение обвала

релаксация, стабильное состояние

## Корректность определений

1. На Рис. 1 указаны значения  $\phi$  в точках  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$ . Выберите произвольные натуральные значения для  $\phi$  в остальных вершинах графа и произведите релаксацию.
2. Пусть  $\phi$  — любое состояние на  $\Gamma = [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ . Докажите, что в какой бы последовательности мы не выполняли обвалы в нестабильных вершинах графа, процесс этот будет конечным и остановится на стабильном состоянии.
3. Докажите, что любые две релаксации (как последовательности вершин где происходят обвалы) одного состояния, отличаются перестановкой порядка операций. Иными словами: для любой вершины  $v$  число обвалов в  $v$  совпадает в обеих релаксациях. Тем самым результат релаксации не зависит от выбранного порядка выполнения обвалов. Результат релаксации состояния  $\phi$  мы обозначим  $\phi^\circ$ .

не решая задач, вы ничего никогда не поймёте

из-за этого свойства модель называется **абелевой** (*abelian sandpile*)

Дискретным лапласианом функции  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется функция  $\Delta F$ , определяемая как

$$(\Delta F)(x, y) = F(x + 1, y) + F(x - 1, y) + F(x, y + 1) + F(x, y - 1) - 4F(x, y).$$

Для данного состояния  $\phi$  проведём любую релаксацию, и в каждой точке  $v \in \Gamma$  мы посчитаем число обвалов (как мы знаем, оно не зависит от выбранной релаксации), обозначим это число  $F(v)$ . Таким образом, мы получили функцию функцию обвалов  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

4. Докажите, что  $\phi + \Delta F \leq 3$  в каждой точке.

5\*. Докажите, что функция обвалов  $F$  для состояния  $\phi$  удовлетворяет следующему свойству. Рассмотрим множество  $A$  функций  $G : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  удовлетворяющих  $\phi + \Delta G \leq 3$  (поточечно). Тогда для любой вершины  $v \in \Gamma$  имеем

$$F(v) = \min\{G(v) | G \in A\}.$$

6. Определите песочную модель на произвольном конечном графе. *Подсказка:* мы должны предположить, что хотя бы одна из вершин графа является *стоком*, т.е. мы запрещаем делать обвалы в этой вершине, и песок, попадающий в неё, попросту исчезает. В примере  $\Gamma = [0, N]^3 \cap \mathbb{Z}^2$  мы можем считать, что мы добавили вершину  $s$ , сток, и соединили её рёбрами со всеми граничными вершинами  $\Gamma$ , причём с угловыми вершинами мы соединили  $s$  двумя рёбрами. 7. Докажите что на конечном графе любая релаксация заканчивается за конечное число шагов.

непростая задача, но очень полезная

можно ли определить модель, где будет два типа песчинок и правила обвалов будут зависеть от того, сколько в данной вершине песчинок и какого типа?

## Распределения, подчиняющиеся степенным законам

Кратко напомним что такое функция распределения. Предположим, что у нас есть бесконечная последовательность вещественных чисел  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  больших 1. Рассмотрим первые  $n$  из них.

$$\text{Пусть } F_n(y) = \frac{\text{количество индексов } i \leq n, \text{ таких, что } x_i \leq y}{n}.$$

Таким образом,  $F_n(x)$  это доля тех индексов, среди первых  $n$ , которые не больше  $y$ . Определим  $F(y) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  — *функцию распределения* — как предел функций  $F_n$ , когда  $n$  стремится к бесконечности (если этот предел существует). Мы говорим, что  $X$  *подчиняется степенному закону* на интервале  $[1, A]$ , если  $F(y) = \alpha y^\beta$  для некоторых вещественных констант  $\alpha, \beta$ .

8. Докажите, что если  $X$  подчиняется степенному закону (как это определено выше), то  $\alpha A^\beta = 1$ .

Обычно говорят, что распределение подчиняется степенному закону, если его гистограмма на двойной логарифмической шкале (Рис. 2) является прямой на достаточно большой части.

функция распределения

степенной закон — это  $F(y) = \alpha y^\beta$

## Появление степенных законов в песочной модели.

Начнём с произвольного состояния  $\phi_0$  на графе  $\Gamma = [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ . Добавим одну песчинку в случайно выбранную вершину  $p_0 \in \Gamma$  и произведём релаксацию. Полученное в результате релаксации состояние обозначим как  $\phi_1$ , т.е.  $\phi_1 = (\phi_0 + \delta_{p_0})^\circ$  где  $\delta_p$  — это функция, равная 1 в  $p$  и 0 в остальных вершинах.

Повторим операцию, добавляя песчинки в случайно выбранные вершины  $p_1, p_2, \dots$ , и производя релаксацию после каждого добавления,  $\phi_{k+1} = (\phi_k + \delta_{p_k})^\circ$ . Это как раз динамика, рассмотренная, рассмотренная Бэком, Тэнгом и Висенфелдом.

Обозначим за  $h_k$  размер подножия лавины, вызванной добавлением  $k$ -ой песчинки, т.е. число вершин где случился хотя бы один обвал в процессе релаксации состояния  $\phi_k + \delta_{p_k}$ . Оказывается, что последовательность  $h_k$  удовлетворяет степенному закону (это легко проверить на компьютере, но частичное доказательство появилось только в этом году). Объём лавины (то есть общее число обвалов во время лавины) тоже удовлетворяет степенному закону.

**9.** На любом языке программирования смоделируйте песочную модель на квадрате  $50 \times 50$ . Во все вершины графа положите по три песчинки. Бросьте одну за одной  $N = 2\,000\,000$  песчинок, как описано выше, получится последовательность размеров лавин

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}.$$

Нарисуйте гистограмму для последовательности  $H$  (например, в языке R, получится Рисунок 2, слева). Нарисуйте гистограмму для последовательности

$$\ln H = \{\ln h_1, \ln h_2, \dots, \ln h_N\}$$

(предварительно выкинув нули из  $H$ ), и используйте логарифмическую шкалу для  $y$ -координаты (Рисунок 2, справа). Убедитесь, что вид второй гистограммы означает что последовательность  $H$  удовлетворяет степенному закону, если из неё предварительно удалить все очень большие ( $h_i \geq 1500$ ) и все маленькие лавины ( $h_i \leq 50$ ), иначе гистограмма совсем вжимается в угол и ничего не видно.

## Песочная группа

Во время вышеописанного процесса добавления песчинки в случайную вершину и последующей релаксации только некоторые (так называемые *возвратные*) состояния имеют вероятность (причём одинаковую!) получиться

все вершины имеют одинаковую вероятность быть выбранными.

это не совсем правда, поэтому сделайте упражнение.



на сколь угодно большом шагу. Мы дадим основную идею доказательства этого факта.

Определим операцию  $+$  на состояниях,  $(\phi + \psi) = (\phi + \psi)^\circ$ . Иначе говоря, мы суммируем количества песчинок обоих состояний в каждой вершине и выполняем релаксацию полученного состояния. Множество возвратных(!) состояний образуют группу (*песочную группу* графа  $\Gamma$ ) относительно этой операции. Мы подойдем к этому вопросу с нескольких сторон. Если не получится разобраться, читайте внятное математическое введение в песочные модели в прекрасно записанных лекциях [4] или учебник [3].

лекции на английском

## В направлении конечного коммутативного моноида

*Конечным коммутативным моноидом* называется конечное множество  $M$  с операцией  $\oplus : M \times M \rightarrow M$  (мы записываем это как  $(a, b) \rightarrow a \oplus b$ ), которая удовлетворяет следующим свойствам:

- $a \oplus b = b \oplus a$  для всех  $a, b \in M$ ,
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$  для всех  $a, b, c \in M$ ,
- наличествует тождественный элемент  $e$ , то есть  $a \oplus e = a$  для всех  $a$ .

бывают ли бесконечные коммутативные моноиды?

Основной пример: **песочный моноид**. Рассмотрим множество **всех** стабильных (то есть невозможно сделать обвал ни в одной вершине) состояний песочной модели.  $\oplus$  будет поточечным сложением с последующей релаксацией.  $e$  будет элементом, который тождественно равен нулю во всех вершинах графа.

*Идеалом* коммутативного моноида  $M$  называется любое такое непустое подмножество  $I \subset M$ , что  $\forall x \in M, x \oplus I \subset I$ , то есть  $\{x + a | a \in I\} \subset I$ .

**10.** Докажите, что пересечение а) двух, б) любого количества идеалов – идеал.

**11.** Докажите, что *минимальный* идеал  $I$  в  $M$ , то есть пересечение **всех** идеалов  $M$  – это группа. Подсказка: сначала докажите, что для любых  $a, b \in I$  существует такие  $x, y \in M$  что  $ax = b, by = a$ .

Состояние  $\phi$  называется *возвратным*, если для любого состояния  $\psi$  существует такое состояние  $\psi'$  что  $\phi = (\psi + \psi')^\circ$ .

**12\***. Докажите, что множество возвратных состояний песочной модели – это минимальный идеал песочного моноида.

**13.** Докажите, что возвратные состояния образуют группу относительно сложения.

Эта группа называется **песочной группой** графа  $\Gamma$ .

другими словами, мы окажемся в  $\phi$  с ненулевой вероятностью если к любому состоянию начальному состоянию  $\psi$  будем добавлять песчинки в случайные вершины

## Возвратные состояния как не содержащие запрещённых под-конфигураций

14. Докажите, что если состояние  $\phi$  содержит две соседние вершины с нулём песчинок в каждой, то оно не возвратное.
15. Докажите, что если состояние  $\phi$  содержит вершину с одной песчинкой, у которой есть два соседа с нулём песчинок, то оно не возвратное.
16. Докажите, что если состояние  $\phi$  можно получить как  $(3 + \psi)^\circ$  для некоторого неотрицательного  $\psi$ , то для любого состояния  $\gamma$  существует неотрицательное  $\psi$  такое что  $\phi = (\gamma + \psi)^\circ$ .

*Запрещённая конфигурацией* состояния  $\phi$  мы называем подграф  $D \subset \Gamma$ , в котором для любой вершины  $v$  выполняется  $\phi(v) < \text{deg}_D(v)$ , то есть число песчинок в  $v$  строго меньше степени  $v$  в  $D$ .

17. Две соседние вершины, в обеих ноль песчинок – это запрещённая конфигурация.
- 18\*. Докажите, что возвратное состояние не может содержать запрещённой конфигурации.
- 19\*. Покажите, что если к возвратному состоянию добавить одну песчинку, то подножие спровоцированной ей лавины односвязно, то есть нельзя найти такой замкнутый путь в графе, что он лежит в подножии лавины, а какая-то вершина внутри области, ограниченной этим путём – в подножии лавины не лежит.

остановитесь на миг и попробуйте описать **все** запретные (как вот эти две) конфигурации для возвратных состояний.

## Единица Крёйца

*Единицей Крёйца*  $\beta$  мы назовём состояние, которое в каждой вершине равно количеству рёбер из неё в стоки.

**Пример.** Для графа  $\Gamma = ([0, n] \times [0, m]) \cap \mathbb{Z}^2$ , пусть его граница  $\partial\Gamma$  (она же множество стоков) это объединение сторон прямоугольника. Таким образом,  $\beta$  равна 2 в углах  $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ , равна 1 вдоль сторон  $\Gamma \setminus \partial\Gamma$  и нулю иначе. Формулами это можно так записать:

$$\beta(1, 1) = \beta(n-1, 1) = \beta(1, m-1) = \beta(n-1, m-1) = 2, \beta(1, i) = \beta(n-1, i) = 1$$

для  $1 < i < m - 1$ , затем

$$\beta(j, 1) = \beta(j, m-1) = 1$$

для  $1 < j < n - 1$  и  $\beta(i, j) = 0$  иначе.

20. Докажите, что для состояния  $\phi$  выполнено  $(\phi + \beta)^\circ = \phi$  тогда и только тогда, когда  $\phi$  не содержит запрещённых конфигураций.

21\*. Докажите, что для состояния  $\phi$  выполнено  $(\phi + \beta)^\circ = \phi$  тогда и только тогда, когда  $\phi$  – возвратное.

22. Докажите, что  $\phi = \langle 2 \rangle$  (то есть состояние, которое во всех вершинах имеет две песчинки) – возвратное состояние.

23. Докажите, что если  $\phi \geq \psi$  во всех точках, то во всех точках, где произойдёт обвал во время релаксации  $\psi$ , произойдёт обвал и в релаксации  $\phi$ .

## 2 В направлении единицы

24\*. Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$  конечное множество. Рассмотрим песочную динамику на  $\Gamma$  (все вершины из  $\mathbb{Z}^2 \setminus \Gamma$  будем считать стоками). Пусть  $\phi$  будет состоянием, которое во всех точках равно 8. Докажите, что  $(\phi - \phi^\circ)^\circ$  является нейтральным элементом (единицей) в песочной группе графа  $\Gamma$ .

Добавлению песчинки в точку и последующая релаксация соответствуют некоей образующей песочной группы графа. Таким образом, шаг нашего случайного процесса заключается в том, что мы выбираем случайную образующую группы и прибавляем к текущему элементу.

Естественно, это приводит к равномерному распределению на элементах группы. Далее, оказывается, что количество элементов песочной группы равно количеству остовных деревьев графа  $\Gamma$ , и это осуществляется некоей естественной биекцией. Но даже нейтральный элемент этой группы<sup>1</sup> выглядит далеко не тривиально, см. Рис. 4.

**Открытая проблема.** Покажите, что единица песочной группы для квадрата выглядит именно так. Или хотя бы что в центре у неё есть квадрат из двоек (и иногда вертикальная и горизонтальная линия из единиц).

используйте сейчас как рецепт для вычисления нейтрального элемента группы, а как доказывать – скоро станет ясно, читайте дальше

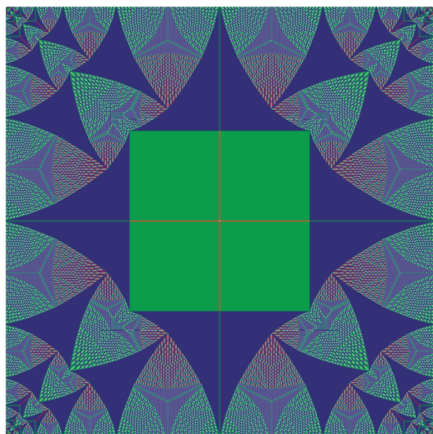


Рис. 4: Нейтральный элемент песочной группы для графа на квадрате  $523 \times 523$ . Чёрное – это вершины графа с 3 песчинками, разные оттенки серого – точки с 2, 1 или 0 песчинок. Обратите внимание на сбалансированные планарные графы внутри треугольников – мы их встретим позже под именем **тропических кривых**

<sup>1</sup>и это не состояние  $\phi \equiv 0$  так как мы никогда не сможем его получить из ненулевого состояния, и тем самым  $\phi \equiv 0$  не является возвратным состоянием.

## Множество возвратных состояний это группа, потому что фактор по решётке

Рассмотрим множество **всех** целозначных (не обязательно неотрицательных) состояний, то есть все функции  $\phi : \Gamma \setminus \partial\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ . Это множество равно  $\mathbb{Z}^N$ , где  $N$  – количество вершин в  $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ .

Объявим эквивалентными состояния  $\phi, \phi'$  если  $\phi - \phi' = \Delta F$  для какой-то функции  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**25.** Докажите, что состояния  $\phi, \phi'$  эквивалентны, если от  $\phi$  к  $\phi'$  можно перейти обвалами и обратными к ним операциями.

**26.** Докажите, что состояния  $\phi, \phi'$  (понимаемые сейчас как две точки в  $\mathbb{Z}^N$ ) эквивалентны, если они отличаются на линейную комбинацию векторов  $\Delta(1_v), v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ . Напомним, что  $1_v$  это функция, равная 1 в  $v$  и ноль иначе.  $\Delta 1_v$  это вектор, равный -4 в координате отвечающей  $v$ , равный 1 в координатах, отвечающих смежным с  $v$  вершинам, и ноль иначе.

**27.** Докажите, что множество классов эквивалентности  $\mathbb{Z}^N$  по такому отношению эквивалентности это группа.

Чтобы показать, что получилась именно песочная группа, а не какая-то другая, достаточно показать, что в каждом классе эквивалентности есть ровно одно возвратное состояние.

Напомним, что  $\beta$  – состояние (единица Крёйца), в вершине  $v$  равно количеству рёбер из  $v$  в вершины-стоки. Заметим, что  $\beta = \Delta F$  где  $F = -1$  на  $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ ,  $F = 0$  на  $\partial\Gamma$ .

**28.** Покажите, что любое  $\phi$  эквивалентно  $\phi + K\beta$  и что  $(\phi + K\beta)^\circ$  возвратное при большом  $K$ . Значит, в каждом классе эквивалентности не менее одного возвратного состояния.

**29\*.** В каждом классе эквивалентности есть не более двух возвратных состояний. Подсказка: если  $\phi = \phi' + \Delta F$  то рассмотрим  $D = \{v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma \mid F(v) = \min(F)\}$ . Тогда  $\phi'$  на  $D$  это запрещённая конфигурация. Потому что рассмотрим любую вершину из  $D$ . В неё суммарно снаружи пришло песка хотя бы 4-количество рёбер из  $v$  внутри  $D$ . Раз  $\phi$  стабильно, значит  $\phi'$  на  $D$  было запрещённым состоянием.

Значит, песочная группа – это фактор  $\mathbb{Z}^N$  по решётке, порождённой  $\Delta(1_v)$ . Можно заметить, такой фактор – это всегда множество точек, расположенных в некотором многомерном параллелепипеде. А значит, количество точек в этом факторе равно объёму этого параллелепипеда, то есть определителю некоторой матрицы. В нашем случае это окажется определитель матрицы лапласиана – это матрица смежности графа, где на диагонали минус степени вершин на диагонали.

**30.** Рассмотрим квадратную матрицу  $A$  лапласиана графа  $\Gamma$ . Каждой вершине  $v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$  соответствует строка и столбец в  $A$ . А именно: в клетке

рассуждение не вполне правильное, нужно воспользоваться (где?) тем, что оба  $\phi, \phi'$  стабильные, возвратные, и что  $\min(F) \leq -1$ .

заметьте, что есть рёбра, ведущие в стоки, поэтому не во всех строчках сумма элементов матрицы равна нулю

$(v, v)$  матрицы стоит  $deg(v)$ , степень вершины  $v$ . В клетках  $(v, w)$  матрицы стоит количество рёбер между  $v$  и  $w$ . Пусть  $E$  единица группы. Докажите, что  $A^{-1}E$  – целочисленный вектор.

почему вообще  $A$  обратимо?

**31.** Докажите, что если  $(2\phi)^\circ = \phi$  для состояния  $\phi \neq \langle 0 \rangle$ , то  $\phi$  – это единица группы.

теперь можно решить и задачу 24.

### Конкретные вычисления единицы песочной группы для вытянутого прямоугольника.

Рассмотрим  $\Gamma = [0, n] \times [0, m]$  где  $n$  сильно меньше чем  $m$ . Заметим, что  $\phi = ((n^2 + n)\beta)^\circ$  эквивалентно единице в песочной группе.

**32.** Докажите, что  $\phi$  – возвратное состояние (из этого следует что оно равно единице  $E$  группы). Рекомендуется для этого сделать  $F(i, k) = (n - k)^2 + (n - k)$  обвалов во всех точках  $(i, k)$ . Докажите, что если сделать такое количество обвалов, то во всех точках  $\Gamma$  кроме правого и левого столбца у нас будет две песчинки, то есть  $\phi + \Delta F$  почти везде равно двойке.

Состояние, полученное в предыдущем упражнении симметрично. Надо доказать, что обвалы песка со сторон не зайдут далеко в центр. Делается это так.

**33.** Рассмотрим состояние  $\psi$  на  $\Gamma$  которое на левой стороне равно

$$n(n + 1) + 2$$

а всё остальное двойки. Докажите, что  $\psi \geq \phi + \Delta F$ . В каждой вершине  $(i, j), i \leq X$  сделаем  $G(i, j) = (X - i)(X - i + 9)/2$  обвалов, где  $X = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ . Покажите что  $\psi + \Delta G \leq 3$ .

это ведь просто доказательство из [8], разбитое на пункты!

Значит,  $E = (\phi)^\circ = (\phi + \Delta F)^\circ$ , и релаксация последнего поточечно не больше релаксации  $\psi$ , которая затрагивает только регион порядка  $X$  около левого и правого столбца.

**34.** Проверьте (экспериментально) для графа  $\Gamma = [0, 5] \times [0, 10000] \cap \mathbb{Z}^2$  единица песочной группы  $\Gamma$  на  $[0, 5] \times [100, 9900]$  равна тождественно 2.

**35.** Возьмём граф  $\Gamma = [0, n] \times [0, m] \cap \mathbb{Z}^2$  и отождествим вершины  $(0, k), (n, k)$  для всех  $k$  (получилось кольцо). Тогда единица песочной группы  $\Gamma$  равна тождественно 3 если  $m$  чётно, и везде 3 и полосу из 2 если  $m$  нечётно.

## 3 В направлении тропических кривых и фонов

### Ещё один предел: малые возмущения максимального стабильного состояния

Рассмотрим ещё одну модель, пусть  $\Gamma$  снова  $[0, N] \times [0, N] \cap \mathbb{Z}^2$ . Пусть  $\phi \equiv 3$ , т.е. мы имеем по три песчинки в каждой вершине графа. Если мы доба-

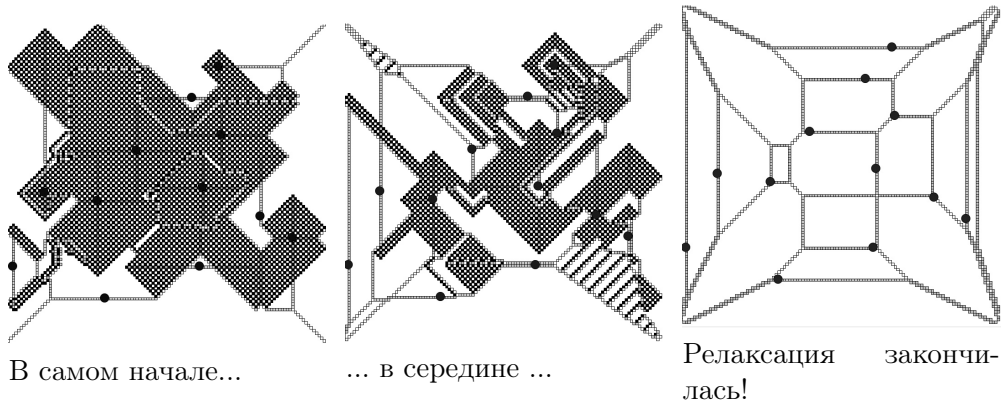


Рис. 5: Белое: 3 песчинки, серое: 2, 1 или 0 песчинок, чёрное: более чем 3 песчинки. Жирные чёрные точки – это точки  $p_i$ .

виз по песчинке в выбранные вершины  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Gamma$ , это спровоцирует большую лавину, много обвалов. Но финальная картина весьма регулярна, см. Рис. 5: в состоянии  $\psi = (\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i})^\circ$  мы будем иметь по три песчинки почти во всех вершинах.

Более того, видно что множество  $D_N = \{v \in \Gamma | \psi(v) \neq 3\}$  образует что-то навряд тонкого графа с прямыми рёбрами рациональных наклонов, и этот граф проходит через точки  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Оказывается [7, 6], что когда  $N \rightarrow \infty$  и мы сохраняем относительные позиции точек  $p_i$ , множество  $D_N$  сходится к *тропической кривой*.

**Определение.** Тропический полином — это функция вида

$$\min_{(i,j) \in A} (a_{ij} + ix + jy)$$

где  $A$  конечное подмножество  $\mathbb{Z}^2$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Тропическая кривая, определяемая тропическим полиномом  $f$  — это множество точек  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  где функция  $f$  не является линейной, иными словами это множество точек “излома” функции  $f$ .

Рассмотрим функцию  $h$  количества обвалов, т.е.  $h(v)$  равно количеству обвалов в вершине  $v$  во время релаксации состояния  $\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i}$ .

**36.** Докажите что если  $v \neq p_i$  и  $\psi(v) = 3$ , тогда

$$4h(v) = \sum_{w \sim v} h(w),$$

здесь  $w \sim v$  означает что  $w$  это сосед  $v$ . *Подсказка:* подсчитайте количество входящих в  $v$  и исходящих из  $v$  песчинок в течение релаксации.

Можно доказать, что функция числа обвалов для состояния  $\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i}$  почти везде совпадает с функцией типа  $\min_{(i,j) \in A} (a_{ij} + ix + jy)$ , и с помощью предыдущего упражнения мы получим что множество  $D_N$  близко к тропической кривой.

## Дискретные гармонические функции

Этот раздел можно пропустить при первом чтении .

**37.** Найдите  $\Delta F$  где  $F(i, j)$  а) линейная, б)  $\frac{1}{2}(i(i+1) + j(j+1))$ , в)  $\lceil \frac{1}{3}i^2 \rceil$ , г)  $\lceil \frac{1}{3}(i^2 + 4ij + j^2 + 4i) \rceil$ , д)  $\lceil \frac{1}{8}(5i^2 + 4ij + 4j^2 + 2i + 4j) \rceil$ .

Функция  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется *дискретно-гармонической* если для всех точек  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  выполнено  $\Delta F(x, y) = 0$ . Функция  $F$  называется *ограниченной сверху*, если существует  $C \in \mathbb{R}$  такое что  $F(x, y) < C$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

**38.** Докажите, что целочисленная ограниченная сверху дискретно-гармоническая функция является константой, т.е.  $F(x, y) = c$  для некоторого  $c$  и всех  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

**39.** Докажите, что если  $F, G$  – супергармонические функции, то есть  $\Delta F, \Delta G \leq 0$  всюду, то  $\min(F, G)$  тоже супергармоническая функция.

**40.** Докажите, что дискретно-гармоническая функция  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (то есть ограниченная функция) является константой.

Подсказка: покажите, что её дискретная частная производная  $G(x, y) = F(x+1, y) - F(x, y)$  тоже дискретно-гармоническая, и ограниченная. Тогда взяв точку, достаточно близкие к максимуму  $G$  и идя от неё, можно получить значения  $F$  больше наперёд заданного числа, что является противоречием.

Помочь могут в том числе и следующие две задачи.

**41.** Пусть  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  дискретно гармоническая. Пусть

$$a_n(f) = \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} (f(i+n, j) - f(i-n, j)).$$

Докажите, что  $a(n+1) + a(n-1) \geq 2a(n)$ .

**42.** Принцип максимума: дискретно-гармоническая функция на  $\Gamma$  достигает максимума и минимума на  $\partial\Gamma$  .

**43.** Для двух положительных дискретно-гармонических функций  $f, g$  на  $\Gamma$ , функция  $f/g$  достигает максимума на  $\partial\Gamma$ .

**44\*.** Докажите, что положительная дискретно-гармоническая функция является константой.

**45\*\*.** Пусть положительная целочисленная гармоническая функция  $F$  удовлетворяет  $F(x, y) < ix + jy + C$  на  $[0, R] \times [0, R] \cap \mathbb{Z}^2$ . Докажите, что

сложно найти раздел математики, где НЕ появляются дискретно-гармонические функции

секретная версия принципа максимума

для достаточно большого  $R$  из этого следует что  $F$  является линейной функцией на  $[R/3, 2R/3] \times [R/3, 2R/3] \cap \mathbb{Z}^2$ .

Полезно когда есть функция  $F$ , лапласиан  $\Delta F$  которой равен нулю везде, кроме одной точки. Имея такую функцию, легко сконструировать решения  $\Delta F = G$  для какой-нибудь функции  $G$ .

**46\*\*.** (функция Грина) Докажите, что существует функция  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  такая что  $\Delta F(i, j) = 0$  для всех точек  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ , кроме  $(0, 0)$  где  $\Delta F = 1$ , кроме того, мы требуем чтобы

$$F(i, j) = -\frac{1}{\pi} \log(i^2 + j^2) + \kappa + O\left(\frac{1}{i^2 + j^2}\right).$$

## Разбиение на волны

На стабильном состоянии  $\phi$ , оператор  $W_v$  волны из точки  $v$  действует следующим образом. Добавим в  $v$  песчинку, произведём обвал в  $v$ , если это возможно, вынем из  $v$  песчинку, произведём релаксацию.

**47.** Пусть  $\phi = \langle 3 \rangle$  на  $\mathbb{Z}^2$ . Докажите что  $W_v \phi = \phi$  для любой вершины  $v$ .

**48.** Рассмотрим произвольное стабильное состояние  $\phi$ . Докажите, что в процессе  $\phi \rightarrow W_v \phi$  в каждой вершине графа произошло не более одного обвала.

**49.** Носитель волны из любой точки в возвратном состоянии не содержит дыр внутри (односвязен).

*Фоном* называется такое состояние  $\phi$  что для любой вершины  $v$  выполнение оператора волны из  $v$  не меняет  $\phi$ , то есть  $W_v \phi = \phi$ . Например,  $\phi = \langle 3 \rangle$  на  $\mathbb{Z}^2$  является фоном. Если мы в редких точках напишем ноль вместо трёх, то всё равно останется фоном.

**Открытая проблема.** Определить все 2-периодические фоны, то есть такие фоны, для которых существует два неколлинеарных вектора  $v, v'$  что  $\phi(p) = \phi(p + v) = \phi(p + v')$  для любой точки  $p \in \mathbb{Z}^2$ .

## Паттерны, солитоны и бэкграунды

Девиантным множеством  $D(\phi)$  состояния  $\phi$  называется множество вершин где  $\phi \neq 3$ . То есть

$$D(\phi) = \{(i, j) \in \Gamma \mid \phi(i, j) \neq 3\}.$$

**50\*\*.** Рассмотрим песочное состояние  $\phi = \langle 3 \rangle$  на полуцилиндре  $\Gamma$ , т.е.

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid px + qy \geq 0\} / \sim$$

наверное, поэтому оператор волны так назвали

фоны, периодичные только в одном направлении, можно склеивать между собой (в ортогональном направлении), поэтому их классификация выглядит более затруднительной.

нет необходимость решать все задачи, скорее, наоборот: проверьте экспериментально, верны ли указанные утверждения. А на других решётках?



где  $(x, y) \sim (x', y')$  когда  $px + qy = px' + qy'$ . Будем насыщать волны из точки  $v = (x, y)$  которая далеко от края цилиндра. Докажите, что при большом  $n$  девиантное множество  $D((W_v)^n \phi)$  будет состоять из неподвижного “мусора” около границы цилиндра и “паттерна” который будет после каждой волны сдвигаться на вектор  $(p', q')$  такой что  $pp' + qq' = 1$ . Рассмотрите сначала случай  $p = 1, q = 0$ .

**51\*\*.** Исследуйте все такие  $F(i, j) = [ai^2 + bij + cj^2 + di + ej + k]$ ,  $a, b, c, d, e, k \in \mathbb{R}$ , что  $0 \leq \Delta F \leq 3$ .

## 4 Много песка в одной точке

**52.** Пусть  $D$  – подмножество  $\Gamma$ , и состояние  $\phi$  получено релаксацией, в ходе которой во всех вершинах  $D$  были обвалы. тогда  $\sum_{v \in D} \phi(v) \geq E$ , где  $E$  – это количество рёбер между вершинами из  $D$ .

важная оценка, хотя и простая

Пусть  $\Gamma' = \mathbb{Z}^2$ , на этот раз мы рассматриваем бесконечный граф. Начнём с состояния  $\phi = \langle 0 \rangle$  на  $\Gamma'$ , т.е. песка нет вообще, решётка пустая. Теперь добавим много песчинок (скажем, пару миллионов) в точку  $O = (0, 0)$  и выполним релаксацию. Другими словами, рассмотрим состояния  $\phi_n = (n\delta_O)^\circ$  для достаточно больших  $n$ .

**53.** Докажите, что для вышеупомянутых состояний  $n\delta_O$  любая релаксация заканчивается за конечное число шагов.

Пусть  $S_n$  – это множество вершин, в которых случался обвал во время релаксации. Оказывается, если мы сделаем гомотетию с коэффициентом  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  с  $S_n$ , то соответствующие *плотности* песка образуют сходящуюся последовательность [10], см. Рис. 4.

**54.** Открытая проблема. Определить граничную кривую  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(n\delta_{(0,0)})^\circ$ , то есть мы кидаем  $n$  песчинок в точку  $(0, 0)$  на пустой плоскости, производим релаксацию, и делаем гомотетию с коэффициентом  $1/\sqrt{n}$ . Известно, что получающиеся картинки будут иметь предел. Выглядит это как-то так:

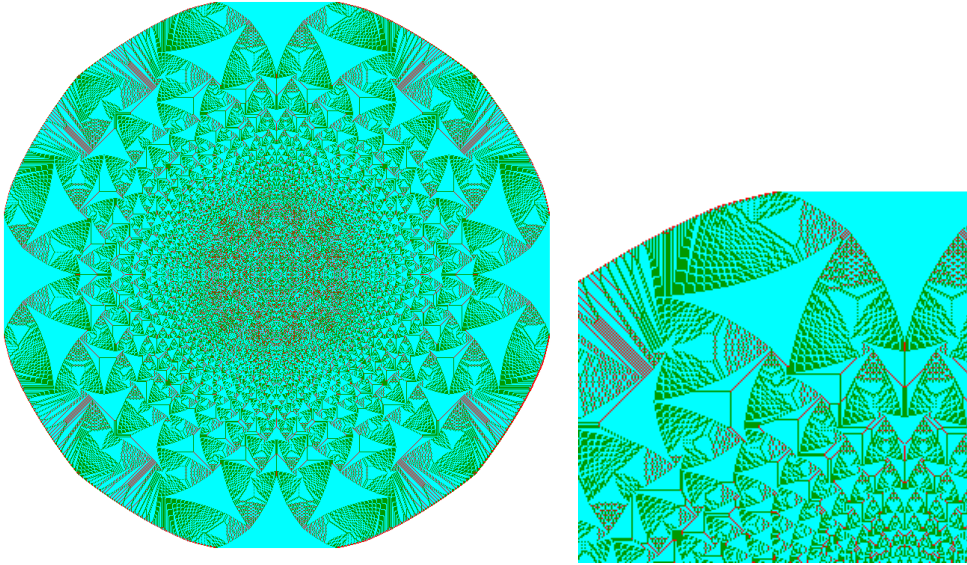
В следующих задачах мы докажем, что  $S_n$  растёт со скоростью  $\sqrt{n}$ . Пусть  $F(i, j)$  – количество обвалов в точке  $(i, j)$  во время релаксации  $n\delta_O$ .

детали можно посмотреть в [8]

**55.** По индукции докажите следующие монотонности, для точки  $(i, j)$ ,  $i > j \geq 0$ :  $F(i - 1, j) \geq F(i, j - 1)$ ,  $F(i, j) \geq F(i + 2, j)$ .

**56.** Используя предыдущее упражнение, докажите, что если в точке  $(i, j)$  случался обвал, то и в  $(i - 1, j)$  тоже случался.

**57.** Используя предыдущие задачи, и то, что  $\phi_n \leq 3$  найдите ромб со сторонами порядка  $\sqrt{n}$  внутри  $S_n$  и квадрат со сторонами порядка  $\sqrt{n}$ , содержащий  $S_n$ .



Это позволяет взять точку с максимальной координатой в  $S_n$  и провести от неё линии типа  $x - y = const$  и получившийся ромб будет внутри  $S_n$ , которое будем внутри квадрата большего в  $\sqrt{2}$  раз. Размер этого всего теперь оценивается из количества песка – оно должно быть не меньше чем количество внутренних рёбер в  $S_n$  (см. упражнения), а значит  $S_n$  растёт не быстрее  $\sqrt{n}$ . Очевидно, что  $S_n$  растёт хотя бы со скоростью  $\sqrt{n}$  – в каждой точке  $S_n$  не более 3 песчинок на окончание релаксации.

Можно и по-другому. Пусть  $u$  – функция количества обвалов, тогда  $0 \leq \Delta u \leq 3$  везде кроме  $(0, 0)$ , где  $\Delta u(0, 0) = -n$ . Существует функция  $g$  (функция Грина), с условием  $\Delta g(x, y) = \delta((x, y), (0, 0))$ , которая растёт как  $\log(x^2 + y^2)$ . Тогда мы можем оценить  $u$  сверху и снизу функциями типа  $g(x, y) + (x^2 + y^2)$ , что даёт оценку роста множества  $u \neq 0$ .

Неизвестно, что за кривая является границей предельного множества (неизвестно даже, что она **не** является окружностью или двенадцатиугольником). Недавно занятая связь этого предела была найдена с *Аполлониевыми упаковками окружностей* [9].

## 5 История вопроса и эвристические соображения

Степенная зависимость<sup>2</sup> часто появляется в естественных науках. Например, сила (по шкале Рихтера) землетрясений в сейсмически активном регионе подчиняется так называемому закону Гутенберга-Рихтера [5]:  $N \sim 10^{-M}$  где  $N$  — это среднегодовое число землетрясений силы (*магнитуды*<sup>3</sup>) не менее  $M$ . Это означает, что для некоторой местности в год случается в среднем 10000 землетрясений силы 2 по шкале Рихтера, 1000 землетрясений силы 3, 100 землетрясений силы 4, 10 силы 5, одно — силы 6, и так далее. Константы могут меняться, но принцип остаётся тот же. Подобные зависимости можно найти повсюду: закон Хэка (Hack's law),  $L \sim A^{0.6}$ , где  $L$  это средняя длина длиннейшего притока в бассейне и  $A$  это площадь бассейна. Среднее время, проведённое в пробке со скоростью  $s$  пропорционально  $1/s$ . Средняя разность высот для двух точек в горах на расстоянии  $r$  пропорциональна  $1/r^\alpha$ ; и так далее. Другие примеры степенных законов, историю их изучения и введение в так называемую “самоорганизующуюся критичность”, “ $1/f$ -шум” и т.д., можно найти в популярной книге [1].

**Эвристические аргументы и история вопроса.** Так как все вышеописанные ситуации весьма различны по природе, можно предположить, что для изучения структурных вопросов достаточно выбрать любую математическую модель с нужными свойствами. Главная сложность при построении такой модели состояла в том, что системы (или их математические модели) обычно имеют параметры, и надо “настраивать” эти параметры, чтобы системы пришли в “критическое состояние”<sup>4</sup>. Размер лавин в песочной модели, как мы увидели ранее, подчиняется степенной зависимости. Поэтому открытие этой модели было важным шагом в понимании “самоорганизующейся критичности” — поначалу, кидая песок на пустой квадрат  $100 \times 100$  мы не видим степенных законов, потом песочная модель самостоятельно, “насыщаясь”, “самоорганизуется” и достигает критического состояния, где степенные законы можно наблюдать. Сейчас мы расскажем как эта модель появилась.

**Маятники.** В статье [2] Бэк, Тэнг и Висенфелд определили модель, в которой маятники расположены в вершинах целочисленной решётки. Маятники соединены пружинками. Когда мы вращаем маятник, пружинки

---

<sup>2</sup>т.е. зависимость типа  $x^a = cy^b$  между переменными  $x, y$  для некоторых констант  $a, b, c$ . На двойной логарифмической шкале такая зависимость выглядит как линейная:  $a \ln x = b \ln y + \ln c$ . Порешав Упражнение 1, вы поймёте, что увидеть такую зависимость в реальных данных довольно сложно, не взяв логарифма и не отбросив “хвосты”.

<sup>3</sup>Землетрясение может иметь магнитуду от 1 до 9.5 по шкале Рихтера.

<sup>4</sup>т.е. состояние, когда между характеристиками модели появляются степенные зависимости, ср. модель Изинга — в ней для наблюдения фазовых переходов нужно зафиксировать некую специальную (критическую) температуру.

скручиваются и накопившаяся энергия может заставить соседний маятник тоже провернуться. На компьютере было показано, что эта модель показывает степенную зависимость. Чтобы прояснить связь с песочной моделью, рассмотрим одномерную модель с маятниками.

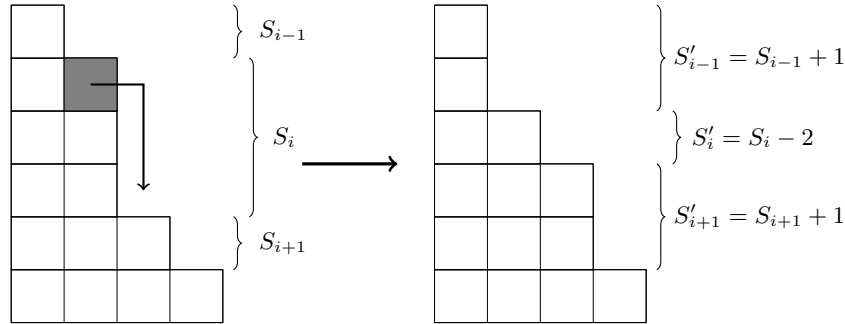


Рис. 6: Одномерная модель песочной кучи. Песчинка перемещается в соседний столбец. Представлены соответствующие изменения наклонов  $S_i$ .

К каждой целой точке на вещественной прямой приделан маятник, который может вращаться вокруг прямой. Маятники соединены пружинками. Если мы крутанём маятник один раз, это даст  $+1$  к скручиванию соседних пружин. Если мы крутанём маятник два раза, то соседние маятники прокрутятся по одному разу. Есть похожая одномерная модель с песком (см. Рис. 6). Когда песчинка перемещается в соседний столбец, разность высот между соседними столбцами кучи в двух местах увеличивается на один. Мы можем представить модель в виде последовательности разностей  $S_1, S_2, \dots, S_n$  высот столбцов (см. Рис. 6). Если  $S_i \geq 2$ , тогда песчинка спадает и  $S_i$  становится  $S_i - 2$ , а  $S_{i-1}, S_{i+1}$  оба увеличиваются на один. Отсюда уже один шаг до определения песочной модели, которое дано в начале этой заметки.

## Список литературы

- [1] P. Bak. How nature works: the science of self-organized criticality. *Springer Science; Business Media*, 2013.
- [2] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Physical review letters*, 59(4):381–384, 1987.
- [3] S. Corry and D. Perkinson. *Divisors and Sandpiles: An Introduction to Chip-Firing*, volume 114. American Mathematical Soc., 2018.

- [4] D. Dhar. Theoretical studies of self-organized criticality. *Phys. A*, 369(1):29–70, 2006.
- [5] B. Gutenberg and C. F. Richter. Magnitude and energy of earthquakes. *Annals of Geophysics*, 9(1):1–15, 1956.
- [6] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpile models. *arXiv:1502.06284*, 2016.
- [7] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpiles. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(2):125–130, 2016.
- [8] Y. Le Borgne and D. Rossin. On the identity of the sandpile group. *Discrete Math.*, 256(3):775–790, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC).
- [9] L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. The Apollonian structure of integer superharmonic matrices. *Ann. of Math. (2)*, 186(1):1–67, 2017.
- [10] W. Pegden and C. K. Smart. Convergence of the Abelian sandpile. *Duke Math. J.*, 162(4):627–642, 2013.