Потеря и спасение факториальности К. Конрад
Дубна, 2017 г. Листок 3

Тексты на диске О: `quadraticideals.pdf` и `primeidealexample.pdf`.

1. Покажите, что если d не квадрат в $\mathbf{Z}$ и $d \equiv 1 \bmod 4$, то
$$\left\{a + b\frac{1+\sqrt{d}}{2} : a, b \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{m+n\sqrt{d}}{2} : m, n \in \mathbf{Z} \text{ и } m \equiv n \bmod 2\right\}.$$

2. В определении произведения идеалов
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1\beta, \ldots, \alpha_i\beta_j, \ldots, \alpha_m\beta_n)$$
докажите, что произведение не зависит от выбора образующих слева.

3. В $\mathbf{Z}[\sqrt{10}]$, покажите, что $(2, \sqrt{10})^2 = (2)$, $(5, \sqrt{10})^2 = (5)$, и идеалы $(2, \sqrt{10})$ и $(5, \sqrt{10})$ не главные.

4. В $\mathcal{O}_D$, если $\overline{\alpha} = \alpha$, то $\alpha \in \mathbf{Z}$. Для $\mathfrak{a} = (1+i)$ в $\mathbf{Z}[i]$ и $\mathfrak{a} = (2, \sqrt{10})$ в $\mathbf{Z}[\sqrt{10}]$ докажите, что $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, но нельзя выбрать образующие идеала $\mathfrak{a}$ из $\mathbf{Z}$. Это важное отличие между сопряженностью на элементах и на идеалах в $\mathcal{O}_D$.

5. В $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, где $d \equiv 1 \bmod 4$ и d не квадрат (не необходимо, чтобы d было свободно от квадратов), покажите, что
$$(2, 1+\sqrt{d})(2, 1-\sqrt{d}) = (4, 2+2\sqrt{d})$$
и идеал справа не главный. Это иллюстрирует, что когда мы работаем в квадратичных кольцах, которые не вида $\mathcal{O}_D$, что произведения идеалов вида $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}$ иногда не главные.

6. Для неквадрата $d \in \mathbf{Z}$, пусть $d = n^2 D$, где $n \geq 1$ и D свободно от квадратов. Когда $n > 1$, пусть p — простой делитель n. Легко видеть, что $p \mid \sqrt{d} \cdot \sqrt{d}$ в $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. Докажите, что p неприводим в $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ и $p \nmid \sqrt{d}$.

7. Используя главный результат из заметок `primeidealexample.pdf` определите, какие из идеалов (2), (3), (5), (7), (11) и (13) в $\mathbf{Z}[\sqrt{10}]$ простые и какие можно представить как произведение двух неединичных идеалов.