Лекция 1: представления групп

1) Осн. понятия: G группа (нас будут интересовать конечные группы)

Опр: V вект. пр-во$/\mathbb{C}$. Предст-е G в V = гомом-зм $\rho: G \to GL(V)$, где $GL(V)$ - это группа всех обратимых лин. операт-в на V ($\dim V = n$: выбор базиса $\rightsquigarrow$ $GL(V) = GL_n(\mathbb{C})$ группа всех $n\times n$ матриц с $\det \neq 0$).

Мы будем называть V представлением G и писать $gv := \rho(g)(v)$, $g_V := \rho(g)$

Дадим теперь базовые определения: подпредставление, прямая сумма, гомоморфизм

Опр: Подпр-во $U \subset V$ подпредставление если оно устойчиво отн. G т.е. $gu \in U$ $\forall g \in G, u \in U$. Естественно подпредставление само является представлением

Отметим, что в любом представлении есть два тривиальных подпредставлений - само и нулевое

Опр: V_1, V_2 - предст-я G. Тогда $V_1 \oplus V_2$ - предст-е: $g(v_1, v_2) = (gv_1, gv_2)$. Это прямая сумма представлений.

Опр: Лин. отобр-е $\varphi: V_1 \to V_2$ гомоморфизм предст-й, если $\varphi(gv_1) = g\varphi(v_1)$ $\forall g \in G, v_1 \in V_1$

Обратимый гомоморфизм называется изоморфизмом. Отметим, что лин. комбинация гомоморфизмов - снова гомоморфизм

Обозн: $Hom(V_1, V_2)$ пр-во лин. отобр. $\supset Hom_G(V_1, V_2)$ пр-во гомом-в.

Пример: $\mathbb{C}^n$ предст-е группы подст-к S_n - ~~...~~ перест. ~~...~~ координат.

2) Групповые кольцо и алгебра

Опр: групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ = своб. абел. группа с базисом v_g, $g \in G$, и умнож. $v_g v_h = v_{gh}$ (на элементах базиса, далее продолжаем по линейности). Аналог. констр. с $\mathbb{C}$ вместо $\mathbb{Z}$ дает групповую алгебру $\mathbb{C}G$ (т.ч $\mathbb{Z}G \subset \mathbb{C}G$). Это ассоциативная алгебра - вект. пр-во над $\mathbb{C}$ с билин. ассоц. умножением. Часто пишем g вм. v_g

Наблюдение: предст-е G = предст-е $\mathbb{C}G$ (= гомом-зм $\mathbb{C}G \to End(V)$ ассоц. алгебр, где $End(V)$ - алгебра всех лин. операторов на V). Действ. по $\varphi: G \to GL(V) \rightsquigarrow \Phi: \mathbb{C}G \to End(V)$, $\Phi(\sum_g x_g v_g) = \sum_g x_g \varphi(g)$, а представление $\mathbb{C}G$ можно ограничить на G

В частн-и, $\mathbb{C}G$ - это предст-е $\mathbb{C}G$ (посредств. умн-я слева) - т.н. регул. предст-е G.

$V = \mathbb{C}^n$ Подпр-я $V_1 = \{(x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{C}\}$, $V_2 = \{(x_1 \dots x_n) \mid \sum x_i = 0\}$, $V = V_1 \oplus V_2$

Гомоморфизм: $\varphi: V \to V_1: (x_1 \dots x_n) \mapsto (\sum x_i)(1 \dots 1)$

$gv_h = v_{gh}$. Проиллюстрируем понятие подпредст-я на примере $\mathbb{C}G$.

убрать [Пример: $V := \mathbb{C}G$, $V_1 = \{x \sum_{g\in G} v_g \mid x \in \mathbb{C}\}$ — одномерное тривиальное предст-е — все эл-ты g действуют единицей, $V_2 = \{\sum_g x_g v_g \mid \sum_g x_g = 0\}$ — тоже подпр-е, $V = V_1 \oplus V_2$.

3) Полн. приводимость.

Опр: Предст-е ~~G-модуль~~ V группы G называется
- неприводимым: $\forall$ подпр-е тривиально
- вполне приводимым: $\forall\, U \subset V$ подпр-я $\exists$ подпр-е $U' \subset V \mid V = U \oplus U'$

$\Rightarrow V = \bigoplus$ непр. предст-я.

Т-ма (Машке) G кон. группа, V кон. мерн. предст-е. Тогда V вполне приводимо.

Д-во: Если $(\cdot,\cdot)$ эрмит. скал. произв, $U \subset V$ подпр-во $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

$(\cdot,\cdot)$ G-инвар-но — $(gu, gv) = (u,v)$ $\forall g \in G$, $u,v \in V$ — и U подпр-е $\Rightarrow U^\perp$ подпр-е, т.е дост. д-ть $\exists$ G-инв скал. произв-е.

Возьмем какое-то: $(\cdot,\cdot)$; $(u,v)_{inv} := \sum_{h\in G} (hu, hv)$, $(\cdot,\cdot)_{inv}$ — эрм. скал. произв, инвар-ть:

$(gu, gv)_{inv} = [\text{опр}] = \sum_{h\in G} (hgu, hgv) = $ [когда h пробегает G, то и hg пробегает G]
$= \sum_{h\in G} (hu, hv) = (u,v)_{inv}$ □

Замеч:* Т-ма верна для любого поля хар-ки 0, вместо $\mathbb{C}$, хотя доказательство надо модифицировать. А вот для полей положительной характеристики полной приводимости уже нет — попробуйте привести пример. Теория представлений групп с коэффициентами в поле положительной характеристики — очень интересная и активная в наст. время область.

4) Лемма Шура — один из самых важных и базовых результатов теории представлений.

Т-ма (лемма Шура) G группа, U, V — неприв. кон. мерн. предст-я.

(а) Если $U \not\cong V$ (неизоморфно) $\Rightarrow \mathrm{Hom}_G(U,V) = 0$

(б) $\mathrm{Hom}_G(V,V) = \{x \cdot \mathrm{id}_V \mid x \in \mathbb{C}\}$

Д-во: $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(U,V) \Rightarrow \ker\varphi \subset U$, $\mathrm{im}\,\varphi \subset V$ подпр-я ($\varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi(gu) = g\varphi(u) = 0$)

$\varphi \neq 0 \Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$, $\mathrm{im}\,\varphi = V \Rightarrow \varphi$ обратим $\Rightarrow$ (а)

$U = V$, x — собств. зн-е $\varphi \Rightarrow \varphi - x\cdot\mathrm{id}$ необр $\Rightarrow \varphi = x \cdot \mathrm{id}$ □

Сл-е 1: Пусть V неприв., а U какое-то предст-е. Напомним, что U раскладывается в прямую сумму неприводимых предст-й и можем говорить о кратности V в разложении. Кратность V в $U = \dim \mathrm{Hom}_G(U,V)$ – воспользуемся леммой Шура и тем, что Hom из прямой суммы – это прямая сумма Hom-в: $\mathrm{Hom}(U, V_1 \oplus V_2) = \mathrm{Hom}(U,V_1) \oplus \mathrm{Hom}(U,V_2)$

Пример (разложение регулярного представления) Кратность V в $\mathbb{C}G = \dim V$

Д-во: $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}G, V) \xrightarrow{\sim} V$ $(\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}G, V) \mapsto \varphi(e) = v$ $(\Rightarrow \varphi(g) = g\varphi(e))$

Сл-е 2: V непр. пр-е, $F = \sum x_g g \in \mathbb{C}G$ т.ч. x_g пост. на классах сопр. в G. Тогда F_V пост. оператор

Д-во: $hFh^{-1} = \sum_{g \in G} x_g hgh^{-1} = \sum_{g\in G} x_{hgh^{-1}} hgh^{-1} = \sum_g x_g g = F \Rightarrow hF = Fh$ в $\mathbb{C}G$
$\Rightarrow h_V F_V = F_V h_V$ в $\mathrm{End}(V) \Leftrightarrow F_V \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$ □

Замеч*: Лемма Шура выполняется в куда большей общности: пусть A ассоц. $\mathbb{C}$-алгебра не более чем счетной размерности, а V её неприводимое предст-е. Тогда все эндоморфизмы постоянны. Можете попробовать д-ть это

5) Характеры: G кон. группа, V предст-е:

Опр: Характер $ch_V(g) := tr(g_V)$ т.е. характер – это функция на G

Замеч: $ch_V(e) = \dim V$ след тожд. оператора. Поэтому, характер – это аналог разм-

Пример: Трив. предст-е $\mathbb{C}$: $ch_{\mathbb{C}}(g) = 1$

Рег. предст. $\mathbb{C}G$: $ch_{\mathbb{C}G}(e) = |G|$, $ch_{\mathbb{C}G}(g) = 0$ $(g \neq 1)$ все диаг. коэфф. равны нулю $(gv_h = v_{gh}$ и $h \neq gh)$.

Прям. сумма: $ch_{V_1 \oplus V_2} = ch_{V_1} + ch_{V_2}$

Лемма: ch_V пост. на классах сопр-и

Д-во: $ch_V(hgh^{-1}) = tr(h_V g_V h_V^{-1}) = tr(g_V) = ch_V(g)$ □

6) Классовые функции и скалярное произведение

Классовая функция на G = функция постоянная на классах сопр-и. Такие функции образуют векторное пр-во, к-ое будем обозн. $Cl(G) = \{f: G \to \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g)\}$

$\dim Cl(G) = \#$ классов сопр-и; $ch_V \in Cl(G)$

$(\cdot,\cdot)$ на $Cl(G)$: $(F,G)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{F(g)}G(g)$ — эрмитово скал. произв-е

Т-ма: Характеры ch_V для непр. V — ортонорм базис в $Cl(G)$

Для д-ва нам будут нужны два вспомогательных предложения

Предл-е 1: $(ch_U, ch_V)=\dim \mathrm{Hom}_G(U,V)$ для произв. предст-й U и V

Д-во: Шаг 1: $U=\mathbb{C}$ (трив. пр-е). $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},V)=V^G:=\{v\in V \mid gv=v\ \forall g\in G\}$ пр-во инвариантов. $F:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\in\mathbb{C}G \Rightarrow \mathrm{im}\,F_V\subset V^G$ и $F_V|_{V^G}=id_{V^G}$ т.е F_V — проектор на $V^G \Rightarrow \dim V^G = tr\,F_V=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} ch_V(g)=(ch_{\mathbb{C}}, ch_V)$

Шаг 2: $\mathrm{Hom}(U,V)$ предст-е G: $g\varphi=g_V\varphi g_U^{-1}$. Утв-е: $ch_{\mathrm{Hom}(U,V)}=ch_V\cdot\overline{ch_U}$
$\Leftrightarrow tr(g_{\mathrm{Hom}(U,V)})=tr(g_V)\overline{tr(g_U)}$; $u_i\in U$, $v_j\in V$ — базисы, собств. для g, λ_i, μ_j — собств. зн-я $\Rightarrow$ моном. матр. $E_{ij}\in\mathrm{Hom}(U,V)$ собств. для g с с.зн $=\mu_j\cdot\lambda_i^{-1}$
$tr(g_{\mathrm{Hom}(U,V)})=\sum_{i,j}\mu_j\lambda_i^{-1}=[g^k=e$ для нек $k\Rightarrow\lambda_i$ корень из $1\Rightarrow\lambda_i^{-1}=\overline{\lambda_i}]$
$=\sum_j\mu_j\cdot\sum_i\overline{\lambda_i}=tr(g_V)\overline{tr(g_U)}$.

Шаг 3: $\mathrm{Hom}_G(U,V)=\mathrm{Hom}(U,V)^G$; $\dim\mathrm{Hom}(U,V)^G=[\text{шаг }1]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}ch_{\mathrm{Hom}(U,V)}(g)$
$=[\text{шаг }2]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{ch_U(g)}ch_V(g)=(ch_U,ch_V)$ □

Можем расм. $F\in Cl(G)$ как элемент в $\mathbb{C}G$ (с коэфф. пост. на классах сопр.)

Предл-е 2: $F_V=\frac{|G|}{\dim V}(\overline{F},ch_V)id_V$ покоорд. сопряжение

Д-во: Сл-е 2 $\Rightarrow F_V$ скалярный оператор $x\cdot id_V$, $x=\frac{1}{\dim V}tr\,F_V=[F=\sum x_g g]$
$=\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G}x_g\,tr(g_V)=\frac{|G|}{\dim V}(\overline{F},ch_V)$ □

Д-во теоремы: Предл. 1 $\Rightarrow ch_V$ ортонорм. Если они не базис $\Rightarrow\exists F\in Cl(G) \mid (\overline{F},ch_V)=0$
$\forall$ непр. предст-я $V \overset{\text{Предл. 2}}{\Rightarrow} F_V=0$. Но $F_{\mathbb{C}G}\neq 0$ $(F=F_{\mathbb{C}G}\mathbb{1})$. Против-е. □

Сл-е: $\#$непр предст-й $=\#$классов сопр-и

Но не следует думать, что есть естественная биекция

Задача*: Над алг. замкн. полем хар-ки >0, $\#$непр предст $\le\#$классов сопр

Лекция 2.

1) Алг. числа

2) Т-ма Бернсайда

1.1) Определения:

а) $z \in \mathbb{C}$ __алгебраическое__: $\exists\ P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ $(P \neq 0)$ т.ч. $P(z) = 0$

Естественно, можно умножить P на целое число так что все коэффициенты будут целые. А можно умножить на рациональное и добиться, чтобы старший коэффициент был равен 1. Но не обязательно можно добиться обоих условий

б) $z \in \mathbb{C}$ __целое алгебраическое__: $\exists\ P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ со ст. коэфф. 1 т.ч. $P(z) = 0$

Т.е. целое алгебраическое – алгебраическое. Но не наоборот.

1.2) Минимальный многочлен

$z \in \mathbb{C}$ алгебр-е;

Опр: миним. мн-н числа z: $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ мин. степени со ст. коэфф. $= 1$ | $P(z) = 0$.

Замеч: Мин. мн-н неприводим. Обратно, если $P(x)$ неприв. мн-н и $P(z) = 0$, то P = ненул. кратное мин. мн-на

Лемма: z целое алгебр-е $\Longleftrightarrow$ мин. мн-н $P_{min}(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Д-во: $\Leftarrow$ тавтология. $\Rightarrow$: $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ со ст. коэфф. $= 1$ и $P(z) = 0$. М. сч. $P(x)$ неприв. в $\mathbb{Z}[x]$. Тогда $P(x)$ неприв. в $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow P(x) = P_{min}(x)$ □

Следствие: Целые алгебраические в $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

1.3) Арифметические св-ва.

Предл-е: Сумма и произв-е целых алгебраических чисел – целое алгебр-е

Д-во: Докажем для суммы

Пусть α, β – целые алгебраические, $P(x), Q(x)$ – их миним. мн-ны; $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$, $Q(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j)$ $(\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1)$. Рассм. $R(x) = \prod_{i,j}(x - (\alpha_i + \beta_j))$ Дост. д-ть $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ Мы это выведем из основной теоремы о симметр. мн-ов

Факт: Пусть $F(x_1, \dots, x_N)$ мн-н с целыми коэфф. симметр-й от переменных $x_1 \dots x_N$ (не меняется

1]

при перестановке переменных). Тогда $F(x_1 \ldots x_N)$ выражается как мн-н с целыми коэфф-и от элементарных симм. мн-ов $\sigma_j(x_1 \ldots x_N) = \sum_{i_1 < \ldots < i_j} x_{i_1} \ldots x_{i_j}$ $(j = 1 \ldots N)$ (напр, $N = 3 \rightsquigarrow \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$, $\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$).

$R(x) = x^{mn} + \sum_{k < mn} c_k x^k$. Расм. c_k как форм. выраж. от $\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_m$.

c_k - мн-н, симметр. отн. по $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, отн. по $\beta_1 \ldots \beta_m$.

Утв-е 1: c_k - мн-н с целыми коэфф. от $\sigma_i(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, $\sigma_j(\beta_1 \ldots \beta_m)$

Д-во утв-я 1: Коэфф-т при мономе от $\beta_1 \ldots \beta_m$ - симметр. мн-н отн. $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ $\Rightarrow c_k$ мн-н с целыми коэфф. от $\sigma_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \ldots \sigma_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \beta_1 \ldots \beta_m$. Применим то же рассужд. к коэф-у при мономе от $\sigma_1 \ldots \sigma_n \rightsquigarrow$ требуемое $\square$

Утв 2: $\sigma_i(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \sigma_j(\beta_1 \ldots \beta_m) \in \mathbb{Z}$ $i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$

Д-во утв 2: $\sigma_i(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \pm$ коэф. при x^{n-i} в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $\square$

Утв-я 1&2 $\Rightarrow c_k \in \mathbb{Z}$ $\square$

Таким образом целые алгебраические числа образуют кольцо. Аналогично алгебраические числа образуют поле - надо ещё проверить, что обратное к алг. числу - алг. число, но это просто. Несложно также заметить, что поле алгебр. чисел = поле частных кольца целых алг. чисел

1.4) Сопряженные числа

Опр. $z \in \mathbb{C}$ - алгебр. Сопряженные к z = корни мин. мн-на для z.

Т.о. если $P(z) = 0$ и z' сопр. к $z \Rightarrow P(z') = 0$

Сл-е 1: $z^n = 1$ и z' сопр к $z \Rightarrow (z')^n = 1$.

Сл-е 2: ~~Пусть α_1, α_2 сопр числа и β_1, β_2 сопр. числа~~ Все сопряженные к $\alpha + \beta$ имеют вид $\alpha' + \beta'$, где α' сопр. к α, β' сопр. к β

Д-во: в обозн. д-ва предл-я: $R(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow R(z') = 0$ для z' сопр к $\alpha + \beta$.
Но $R(x) = \prod_{i,j} (x - \alpha_i - \beta_j)$ $\square$

Необязательное замечание: конечно, сопряженные знают сопряженным отн. группы Галуа (при её действии на поле алгебраических чисел)

1.5) Связь с характерами. Давайте поймем, как характеры связаны с алгебраическими числами - это то, зачем алгебраические числа нам нужны. Первое свойство

71

совсем просто

Лемма: G кон. группа, V предст., $g \in G$. Тогда $ch_V(g)$ цел. алгебр.

Д-во: $\exists k > 0 \Rightarrow g^k = 1 \Rightarrow$ собств. зн-я g_V корни из 1 (k-ой степени), $ch_V(g)$ = сумма собств. зн-й $\Rightarrow$ цел. алгебр $\square$

Второе свойство интереснее

Предл-е: V непр. предст-е, $C \subset G$ класс сопр., $g \in C \Rightarrow \frac{|C|}{\dim V} ch_V(g)$ цел. алгебр.

Д-во: $F := \sum_{g \in C} g \in \mathbb{Z}G$. Предл. 2 лекции 1 $\Rightarrow F_V = \alpha \cdot Id_V$; $\alpha = \frac{|G|}{\dim V}(\overline{F}, ch_V)$ $= \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \overline{F}(g)\, ch_V(g) = \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in C} ch_V(g) = \frac{|C|}{\dim V} ch_V(g)$ $(g \in C)$. Дост:

$\exists P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ со ст. коэфф. 1 $\mid P(F) = 0$ (в $\mathbb{Z}G$); $n > 0 \rightsquigarrow U_n = Span_{\mathbb{Z}}(1, \dots F$ $\rightsquigarrow U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset \mathbb{Z}G$. Структ. теория кон. порожд. абел групп $\Rightarrow$ цепочка стабилизируется $\Rightarrow F^n \in U_n \Leftrightarrow F^n = a_{n-1}F^{n-1} + \dots + a_0 \rightsquigarrow P(x) := x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$

$P(F) = 0 \Rightarrow P(F_V) = 0 \Rightarrow P(\alpha) = 0$ $\square$

2) Т-ма Бернсайда

2.1) Простые группы: G кон. группа

Опр: $H \subset G$ норм. подгруппа, если H подгр. & $ghg^{-1} \in H$ $\forall g \in G, h \in H$

$\{e\}, G \subset G$ норм (тривиальные норм. подгруппы)

Абелевы G без нетр. норм. подгрупп — $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p простое

Опр: Неабелева G без нетр. норм. подгрупп назыв. <u>простой</u>.

Пример 1: $A_n \subset S_n$ — подгр. четных подстановок: проста для $n \geq 5$ (задача)

Пример/задача 2: q — степень простого $\rightsquigarrow SL_2(\mathbb{F}_q) \supset Z$ центр (элементы коммут. со всем; это норм. подгруппа). Тогда $PSL_2(\mathbb{F}_q) := SL_2(\mathbb{F}_q)/Z$ простая для $q > 3$ и $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$ (а для $q > 5$ получаем новые простые группы

Классификация простых конечных групп известна — это группы из примера 1, далеко идущее обобщение примера 2 — т.н. конечные простые группы типа Ли, и 26 исключительных групп. Но наш разговор будет не в этом

2.2) Теорема Бернсайда: Пусть p, q простые числа. Группа порядка $p^n q^m$ $(n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

не простая

Замечание: на три простых множителя обобщить уже нельзя — A_5 имеет порядок $60 = 4 \cdot 3 \cdot 5$; Эквивалентная формулировка — что группа порядка $p^n q^m$ разрешима — допускает вложенное семейство нормальных подгрупп с абелевыми факторами.

2.3) Разогрев: группы порядка p^n

Предл: группа порядка p^n не простая

Д-во: Дост. д-ть, что центр $Z \neq \{e\}$. $Z = \bigcup C$ (одноэл. классов сопр.)

Но $\sum\limits_C |C| = |G| = p^n$, $|C| \mid |G| \Rightarrow |C| = p^{k(C)}$; $k(\{e\}) = 0 \Rightarrow$ $|C| = 1$

$\exists\ C \neq \{e\} \mid |C| = 1$ (иначе у всех остальных классов кол-во эл-тов делится на p, и левая часть суммы сравнима с $1 \bmod p$) $\Rightarrow Z \neq \{e\}$ $\square$

Это доказательство не обобщается напрямую для групп порядка $p^n q^m$ — у нас могут быть классы сопр-ти, у которых число эл-тов — степень p, и те у которых число элементов — степень q. Мы увидим, однако, что свойства характеров — включая их связь с целыми алгебраическими числами помогают с этим бороться.

Лекция 3: Д-во т-мы Бернсайда

1) Т-ма и основные шаги

2) Зануление характеров

3) Завершение д-ва

1) Т-ма 1: p, q - простые, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Группа порядка $p^n q^m$ не простая
Предп. противное: G - простая, $|G| = p^n q^m$. По пред. лекции (конец) $n, m > 0$ и $\exists$ класс сопр. C т.ч. $|C| \not\vdots\, pq$. Фиксируем его. М.сч. $|C| = p^k$ и $k > 0$ (иначе центр $\neq \{e\}$ норм подгруппа) Мы увидим: если V непр. предст-е, и $p \nmid \dim$ то $ch_V(g) = 0$. Отсюда и разложения $\mathbb{C}G$ на неприв-е (лекция 1, мы напомним это ниже) мы выведем теорему

2) Осн. результат этой части:
Т-ма 2: G кон. группа, $C \subset G$ класс сопр., V непр. предст-е т.ч. $НОД(|C|, \dim V) = 1$
$\Rightarrow ch_V(g) = 0 \; \forall g \in C$ либо g_V пост. оператор $\forall g \in C$.

2.1) Напоминание (лекция 2): G кон. группа, $C \subset G$ класс сопр, V непр предст.
Тогда:
- $ch_V(g)$ целое алгебр
- $\frac{|C|}{\dim V} ch_V(g)$ целое алгебр $\forall g \in C$

Следствие: $g \in C \Rightarrow \frac{НОД(|C|, \dim V)}{\dim V} ch_V(g)$ целое алг.
Д-во:
$\exists\, a, b \in \mathbb{Z} \mid НОД(|C|, \dim V) = a|C| + b \dim V$ $\quad (b + a\frac{|C|}{\dim V}) ch_V(g) =$
$b \cdot ch_V(g) + a \frac{|C|}{\dim V} ch_V(g)$ целое алг. Но $b + \frac{a|C|}{\dim V} = \frac{a|C| + b \dim V}{\dim V} =$
$= \frac{НОД(|C|, \dim V)}{\dim V}$ □

2.2) Доказательство Т-мы 2: По сл-ю: $\frac{ch_V(g)}{\dim V}$ целое алг-е. Пусть $\dim V = N$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N$ - собств. зн-я g_V. Т.е $\frac{1}{N}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_N)$ целое алг-е

Предложение: $\xi_1 \dots \xi_N$ корни из 1 т.ч. $\frac{1}{N}(\xi_1+\dots+\xi_N)$ целое алг-е. Тогда $\xi_1+\dots+\xi_N=0$ либо $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_N$.

Для доказательства нам надо напомнить факты о сопряженных к алгебраическим числам мы доказали, по большей части в лекции 2

(i) Сопрж. к корню из единицы - корень из 1

(ii) α и β сопрж $\Rightarrow \frac{\alpha}{N}$ сопряжено с $\frac{\beta}{N}$ $\forall N \in \mathbb{Z}_{>0}$ (это быстро следует из опр-я)

(iii) α целое алг-е и β сопр. к $\alpha \Rightarrow \beta$ целое алг-е

(iv) Сопрж к $\alpha+\beta$ имеет вид $\alpha'+\beta'$, где α сопр. с α', β с β'

(v) Пусть $\alpha=\alpha_1$ - целое алг-е и $\alpha_2, \dots \alpha_k$ все его сопр-е. Тогда $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\alpha_1 \dots \alpha_k$ корни неприводимого в $\mathbb{Z}[x]$ многочлена - его своб. член ненулевое целое

Д-во предл-я: $\alpha = \frac{1}{N}(\xi_1+\dots+\xi_N)$. Сопр. $\alpha' = [$(ii) & (iv) мы доказали для $N=2$, но по инд-и оно верно $\forall N] = \frac{1}{N}(\xi_1'+\dots+\xi_N')$, ξ_i' сопр. к ξ_i, т.е, по (i) корень из 1.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $|\alpha| \leq 1$ (нер-во треуг-а: $|\xi_i|=1$) и $|\alpha|=1 \Leftrightarrow \xi_1 = \dots = \xi_N$

Но $|\alpha'| \leq 1$ $\forall$ сопр. α'. По (5) $\Rightarrow |\alpha|=1 \Rightarrow \xi_1 = \dots = \xi_N$. □

Д-во теоремы 2: 1ая возм. в предл-и $\Leftrightarrow ch_V(g)=0$; 2ая возм-ть: $\xi_1 = \dots = \xi_N$ $\Leftrightarrow [g_V$ кон. порядка $\Rightarrow$ диагонализуем$]$ $g_V = \xi \cdot Id_V$. □

2.3) Частный случай простой группы G

Т-ма 2': G простая группа, V непр. предст-е, нетривиальное, C класс сопр. $\neq \{e\}$ с НОД$(|C|, \dim V)=1$. Тогда $ch_V(g)=0$ $\forall g \in C$

Д-во: $ch_V(g) \neq 0 \Rightarrow g_V$ пост. оператор; $H = \{g \in G \mid g_V$ пост. оператор$\}$ - норм подгруппа

g_V пост. $\Rightarrow (hgh^{-1})_V = h_V g_V h_V^{-1} = g_V$; $H \neq \{e\}$ т.к $C \neq \{e\}$ и $C \subset H$. $\Rightarrow$

$H = G$, $H_0 :=$ ядро предст-я - норм. подгр. в G $\Rightarrow$ либо $H_0 = \{e\}$ либо $H_0 = G$.

$H_0 = \{e\} \Rightarrow G \hookrightarrow \{$группа пост. операторов$\}$ абелева $\Rightarrow G$ не прост., против

$H_0 = G \Rightarrow V$ трив., против. □

Задача:* ~~Пусть V прив. непр. предст.~~ V непр. предст-е, нетрив. Тогда $\exists g \in G \mid \chi_V(g)=0$ (G разреш. кон. группа)

3) Завершение д-ва:

3.1) Напомин. (лек 1) • Кратность неприв. V в $\mathbb{C}G = \dim V$

• $ch_{\mathbb{C}G}(g) = \delta_{g,e}|G|$

Сл-е: • $\sum_V (\dim V)^2 = |G|$ (сумма по всем непр. предст-ям V группы G: подставьте $g=e$ во второе равенство)

• $g \neq e \Rightarrow \sum_V (\dim V)\, ch_V(g) = 0$ будем этим пользоваться

3.2) Д-во: C с $|C| = p^k$ $(k>0)$, $g \in C$

$$\Rightarrow \sum_V (\dim V)\, ch_V(g) = 0$$

Разобьем непр. предст-я на три группы:

• трив. предст-е V_{triv}: $ch_{V_{triv}}(g) = 1$

• предст-я V' с $p \nmid \dim V'$. Т-ма 2' $\Rightarrow ch_{V'}(g) = 0$

• предст-я V'' с $p \mid \dim V''$

$$0 = \sum_V (\dim V)\, ch_V(g) = 1 + 0 + \sum_{V''} (\dim V'')\, ch_{V''}(g) =$$

$$= 1 + p \sum_{V''} \underbrace{\frac{\dim V''}{p}}_{\text{целое}} \underbrace{ch_{V''}(g)}_{\text{алг. целое}} = 1 + pz, \; z \text{ алг. целое}$$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{p}$. Мы знаем (лек. 2), что алг. целые в $\mathbb{Q}$ — это целые

Противоречие!

Задача*: G произв. кон. группа, V непр. предст. $\Rightarrow \forall \dim V \mid |G|$