

### Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1

**1.1.** Сформулируйте на языке коммутативных полуколец теорему Дирихле о простых в арифметической прогрессии.

**1.2.** Сформулируйте на языке коммутативных полуколец теорему Лагранжа о представлении натурального числа в виде суммы двух квадратов.

**1.3.** Сформулируйте на языке коммутативных полуколец теорему Лагранжа о представлении натурального числа в виде суммы трёх квадратов.

**1.4.** Какие свойства делимости чисел  $2^n \pm 1$  друг на друга выразимы на языке коммутативных полуколец?

**1.5.** Какие из утверждений, сформулированных в задачах **1.1-1.4**, истинны для полукольца  $\text{Sub}(U), \cup, \cap; \emptyset, U$  подмножеств универсального множества? Для кольца целых чисел? Для поля рациональных чисел?

В задачах **1.6.-1.12** используйте следующие обозначения:

$(A \bullet B)$  – прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ ;

$(a \bullet b)$  – точка пересечения прямых  $a$  и  $b$ ;

$(A!a)$  – прямая, проходящая через точку  $A$  и параллельная прямой  $a$ .

**1.6.** Сформулируйте свойство диагоналей параллелограмма быть параллельными. Противоречит ли оно постулатам Eu1 и Eu5?

**1.7.** Сформулируйте свойство медиан треугольника быть параллельными. Противоречит ли оно постулатам Eu1 и Eu5?

**1.8\*.** Вытекает ли *аксиома Дезарга* из постулатов Eu1 и Eu5?

**1.9\*.** Вытекает ли *аксиома Паппа* из постулатов Eu1 и Eu5, дополненных аксиомой Дезарга?

**1.10.** Дайте определение *касания* прямой и коники.

**1.11.** С помощью *теоремы Паскаля* определите *коникку*, проходящую через пять точек.

**1.12\*.** Выделим на проективной плоскости две произвольные точки и назовём *окружностями* проходящие через них коники. Постройте теории окружностей, вписанных в и описанных около треугольника.