NP-полные задачи // Адрианов Н.М. // Дубна, июль 2018

Задачи к лекции 1

1. Рассмотрим следующие задачи на графах (считаем, что граф задан множеством вершин V и множеством ребер E, и обозначаем его $G = (V, E)$).

(а) (Максимальное) независимое множество. Дан граф $G = (V, E)$. Найти множество $S \subset V$ максимального размера такое, что любая пара вершин $u, v \in S$ не соединена ребром: $(u, v) \notin E$.

(б) (Минимальное) вершинное покрытие. Дан граф $G = (V, E)$. Найти множество $S \subset V$ минимального размера такое, что для любого ребра хотя бы один его конец лежит в множестве S: $\forall e = (u, v) \in E$ $u \in S$ или $v \in S$.

(в) (Максимальная) клика. Дан граф $G = (V, E)$. Найти множество $S \subset V$ максимального размера такое, что для любая пара вершин из S соединена ребром: $\forall u, v \in S$ $(u, v) \in E$.

Сформулируйте эти задачи в виде задач поиска. Покажите, что они сводятся друг ко другу.

2. Задача булевой выполнимости (SAT). Пусть x_1, ... x_n – булевые переменные. Переменную x_i или ее отрицание $\bar{x}_i$ будем называть *литералом*. Дизъюнкцию (логическое «или») нескольких литералов будем называть *клаузой*. Пусть дана формула $F(x_1, \dots x_n)$ в конъюнктивной нормальной форме, то есть F представлена в виде конъюнкции некоторого количества клауз. Требуется найти такие значения переменных x_1, ... x_n, при которых формула $F(x_1, \dots x_n)$ примет значение «истина».

(а) Задачей k-SAT, где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, называется задача SAT такая, что в каждой клаузе используется не более k литералов. Докажите, что любую задачу SAT можно свести к задаче 3-SAT. (*Указание:* вводите новые переменные и заменяйте клаузы с > 3 литералами клаузами с меньшим числом литералов).

(б) Сведите задачу 2-SAT к задаче об ориентированных графах. (*Указание:* Для каждой переменной x_i введите две вершины графа, соответствующие двум возможным значениям: «истина» и «ложь». Как на основе 2-SAT формулы определить ребра графа? Как переформултруется вопрос о выполнимости формулы в терминах этого графа?)

(в) Сведите SAT к задаче о независимом множестве (*Указание:* для каждой клаузы из k литералов возьмите клику на k вершинах, пометьте каждую вершину литералом, добавьте еще некоторые ребра между кликами).

(г) Поиграйте в «SAT game» (там несколько уровней, желательно научиться решать головоломку на уровне «too hard»):
`http://www.cril.univ-artois.fr/~roussel/satgame/satgame.php?lang=eng`

3. Для строки s рассмотрим набор $P_k(s)$ всех подстрок размера k. Легко видеть, что таких подстрок всего $m - k + 1$ (если подстроки повторяются, то мы учитываем их с кратностью). Пусть нам дан набор P из $m - k + 1$ строк длины k. Найти строку s длины m такую, что $P_k(s) = P$.

(а) Сведите эту задачу к задаче о гамильтоновом пути.

(б) Сведите эту задачу к задаче об эйлеровом пути.