NP-полные задачи // Адрианов Н.М. // Дубна, июль 2018

Задачи к лекции 2

Добавим в нашу коллекцию NP-полных задач несколько новых.

3-дольное сочетание. Дан набор троек $S = \{s = (s_1, s_2, s_3)\}$, где $s_1, s_2, s_3 \in \{1, \dots n\}$. Найти подмножество $I \subset S$ такое, что $|I| = n$ и для любой пары элементов $s, t \in I$ все их координаты различаются: $s_1 \neq t_1$, $s_2 \neq t_2$, $s_3 \neq t_3$.

Уравнения в нулях и единицах. Дана матрица, состоящая из 0 и 1: $A = (a_{ij})_{i=1\dots m, j=1\dots n}$, $a_{ij} = 0, 1$. Найти вектор, состоящий из 0 и 1: $x = (x_i)_{i=1\dots n}$, $x_i = 0, 1$ такой, что $Ax = \mathbf{1}$. (Здесь $\mathbf{1}$ – вектор размера m, состоящий из 1).

Целочисленное линейное программирование. Дана целочисленная матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, целочисленные вектора $b \in \mathbb{Z}^m$ и $c \in \mathbb{Z}^n$ и целое число g. Найти целочисленный вектор $x \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $Ax \leq b$, $c^T x \geq g$. (Сравнение двух векторов производится покоординатно).

Сумма подмножества. Дан набор целых чисел $a_1, \dots a_n$ и целое число g. Найти подмножество $I \subset \{1, \dots n\}$ такое, что $\sum_{i\in I} a_i = g$.

Хроматическое число. Дан граф $G = (V, E)$ и целое число k. Раскрасить вершины в k цветов так, чтобы никакие две вершины, соединенные ребром, не оказались окрашены в одинаковый цвет.

1. Покажите, что задача о 3-дольном сочетании сводится к задаче решения уравнений в 0 и 1.

2. Если задача A является частным случаем задачи B, то A сводится к B тривиально. Например, задача решения уравнений в нулях и единицах является частным случаем задачи линейного программирования. Покажите, что задача о сумме подмножества является частным случаем задачи о рюкзаке.

3. Постройте сведение задачи решения уравнений в 0 и 1 к задаче о сумме подмножества (*Указание:* Проинтерпретируйте столбцы матрицы как числа).

4. Для формулы 3-SAT на $n \geq 4$ переменных $x_1, \dots x_n$, состоящей из клауз $C_1, \dots C_m$, определим граф $G = (V, E)$ так:

$$V = \{x_1, \dots x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n\} \cup \{v_1, \dots v_n\} \cup \{C_1, \dots C_m\}.$$

$$\begin{array}{rclclc} E & = & \{(x_i, \bar{x}_i) \mid i = 1, \dots n\} & \cup & \{(v_i, v_j) \mid i \neq j\} & \cup \\ & & \{(v_i, x_j) \mid i \neq j\} & \cup & \{(v_i, \bar{x}_j) \mid i \neq j\} & \cup \\ & & \{(x_i, C_k) \mid x_i \notin C_k\} & \cup & \{(\bar{x}_i, C_k) \mid \bar{x}_i \notin C_k\}. & \end{array}$$

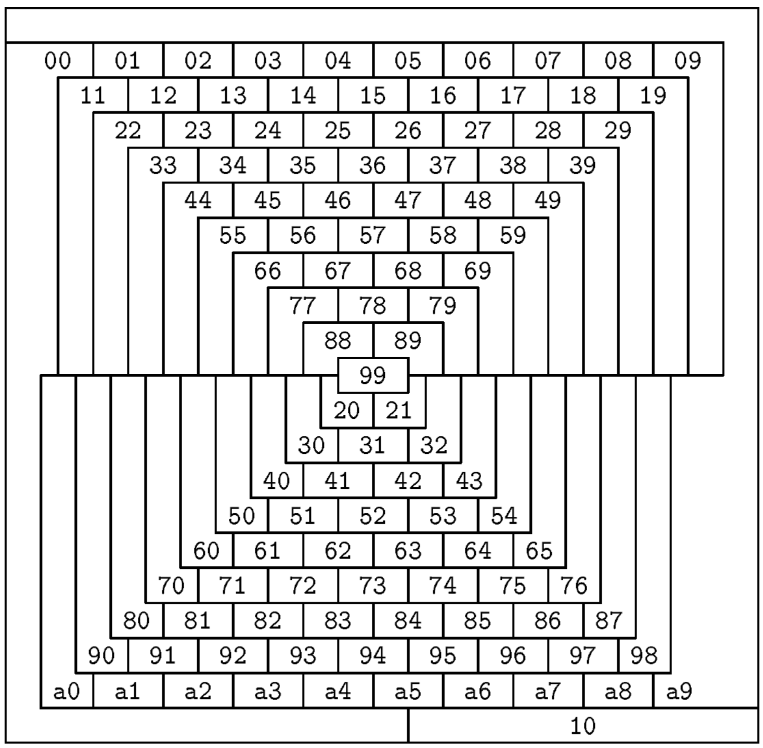
Нарисуйте описанный граф и убедитесь, что это сведение задачи 3-SAT к задаче о хроматическом числе. Какое количество цветов нужно потребовать в этой задаче? Зачем в этой конструкции ограничения 3-SAT (а не просто SAT) и $n \geq 4$?

5(а). Решите «самую сложную головоломку судоку» (по мнению *The Telegraph*):

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

AI14473 (c) Arto Inkala www.aisudoku.com

5(б). Раскрасьте в 4 цвета карту, опубликованную Мартином Гарднером в качестве первоапрельского розыгрыша:



6. Установите какой-нибудь из SAT-солверов и решите задачу 5 с их помощью.

- `glucose` – `http://www.labri.fr/perso/lsimon/glucose/`
- `lingeling` – `http://fmv.jku.at/lingeling/`
- `minisat` – `http://minisat.se/`

Файлы с описанием этих задач – в приложенном архиве. Формат входных данных для SAT-солверов простой и описан, например, здесь: `https://www.dwheeler.com/essays/minisat-user-guide.html`