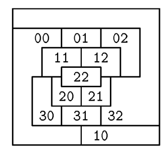
Задачи к лекции 3

1. Пусть имеется n булевых переменных $x_1, \ldots x_n$. Постройте (более или менее компактную) КНФ-формулу, множеством решений которой будут все наборы из n булевых значений, в которых значение «истина» встречается не более r раз. Другими словами, нужно выразить «псевдобулево» ограничение $x_1 + \ldots + x_n \leq r$. *Указание:* один из возможных вариантов – ввести новые переменные s_j^k, которые будут принимать значение «истина», если $x_1 + \ldots + x_{j+k-1} \geq k$.

2. В первоапрельском розыгрыше Мартин Гарднер использовал карту, придуманную Вильямом Макгрегором. Эту карту можно включить в семейство карт разного размера. Например, карта Макгрегора порядка 3 будет иметь следующий вид:



(а) Опишите конструкцию карты Макгрегора порядка n. Сколько вершин и ребер в соответствующем (двойственном) графе? Какие степени вершин?

(б) Есть ли 4-клики в графах Макгрегора? Сколько их?

(в) Найдите раскраски карт Макгрегора небольшого размера так, чтобы количество стран, окрашенных в некоторый фиксированный цвет, было как можно меньше. Существуют раскраски, в которых некоторый цвет используется для не более чем $5n/6$ стран. Можно ли конструкцию этих раскрасок распространить на произвольные n?

(г) Используйте SAT-солвер и конструкцию, описанную в задаче 1, для того, чтобы найти минимальное r такое, что существует раскраска карты Макгрегора порядка n такая, что количество стран, окрашенных в один из цветов равно r.

3. Пусть $T(n)$ – максимальное количество листьев в дереве перебора, которое проходит DPLL-алгоритм на 3-SAT задаче с n переменными. Алгоритм действует следующим образом:

- Выбираем некоторую клаузу c – в ней не более 3 переменных x_i, x_j, x_k.
- Присваиваем переменной x_i значение, которое выполнит клаузу c, исключаем клаузы, в которые x_i входит в виде такого же литерала и исключаем отрицание этого литерала из остальных клауз. Решаем получившуюся 3-SAT задачу от $n-1$ переменной. Если решение найдено – выдаем его, иначе – присваиваем переменной x_i другое значение.
- Присваиваем переменной x_j значение (...) решаем получившуюся задачу от $n-2$ переменных. (...)
- Присваиваем переменной x_k значение (...) решаем получившуюся задачу от $n-3$ переменных. Если решение найдено – выдаем его, иначе – UNSAT.

Следовательно, функцию $T(n)$ мы можем оценить как

$$T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + T(n-3).$$

Оцените скорость роста функции $T(n)$. *Напоминание:* мы умеем решать линейные рекурентные соотношения. Вспомните, например, как выводится явная формула для чисел Фибоначчи. Сравните полученную оценку с полным перебором 2^n вариантов.

4. Вопросы для тех, кто раньше не слышал о теории Рамсея. Популярное введение: `http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Ramsey.htm`

(а) На вечеринке встретились $N = 6$ человек. Докажите, что среди них найдутся либо 3 попарно знакомых человека, либо 3 попарно незнакомых.

(б) Покажите, что $N = 5$ недостаточно, чтобы утверждение пункта (а) было верно.

(в) Докажите, что среди $N = 9$ человек всегда найдется 3 попарно знакомых человека, либо 4 попарно незнакомых. (Вариант попроще: доказать утверждение для $N = 10$).

(г) Покажите, что $N = 8$ недостаточно, чтобы утверждение пункта (в) было верно.

(д) Докажите, что для любой раскраски чисел $\{1, 2, \ldots 9\}$ в два цвета найдутся три числа, окрашенные в один цвет, которые образуют арифметическую прогрессию.