Задачи к лекции 4

1. Опишем «хороший» жадный алгоритм для задачи о рюкзаке.

(1) Упорядочим предметы по убыванию относительной ценности v_i/w_i:

$$\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \frac{v_3}{w_3} \geq \ldots$$

(2) Кладем в рюкзак предметы $1, 2, \ldots k$, пока они помещаются. Получили некоторое решение с ценностью $v_{greedy} = v_1 + \ldots + v_k$.

(3) Возьмем предмет с максимальной ценностью v_{max}. Если $v_{max} > v_{greedy}$, то вместо решения, полученного на шаге 2, берем решение, состоящее из одного этого предмета.

Покажите, что этот алгоритм дает решение, которое не более чем в 2 раза хуже оптимального. *Указание:* сравните оптимальные решения задачи о рюкзаке и задачи дробного рюкзака. Воспользуйтесь тем, что жадный алгоритм для задачи дробного рюкзака дает оптимальное решение, причем ценность этого решения находится между $v_1 + \ldots + v_k$ и $v_1 + \ldots + v_k + v_{k+1}$.

2. Опишем приближенный алгоритм для минимального вершинного покрытия графа $G = (V, E)$. Положим $S = \emptyset$. Пока множество E непусто: выбираем произвольное ребро $(u, v) \in E$, добавляем вершины u и v в множество S, удаляем из E все ребра инцидентные вершинам u и v. Покажите, что

(а) в результате работы алгоритма получается вершинное покрытие графа;

(б) в найденном вершинном покрытии число вершин не более чем в 2 раза больше оптимального.

3. Построим приближенные алгоритмы решения задачи минимального вершинного покрытия с использованием линейного программирования. (Считаем известным, что задача ЛП может быть решена за полиномиальное время.)

(а) Напишите задачу ЛП для минимального вершинного покрытия. Пусть $x = (x_u)_{u \in V}$ – некоторое оптимальное решение.

(б) Зафиксируем значения x_u, которые равны 0, 1/2 или 1. Покажите, что существует a такое, что для любого $\varepsilon \in [-a, a]$ можно изменить остальные значения x_u на $\pm\varepsilon$, и решение при этом останется оптимальным. Выведите отсюда, что мы можем за полиномиальное время найти полуцелое оптимальное решение задачи ЛП.

(в) Покажите, как из точного полуцелого решения получить целое решение не более чем в 2 раза хуже оптимального.

(г) Предположим, что вершины графа раскрашены в 4 цвета. Выполните более аккуратный переход к целому решению с использованием раскраски вершин и покажите, что полученное решение не более чем в 3/2 раза хуже оптимального.

email: `nadrianov@gmail.com`