Конечномерные алгебры и действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика”, Дубна, 20-25 июля 2018 года

Задачи к занятию 1

Задача 1. Найдите все обратимые элементы, делители нуля, нильпотенты и идемпотенты в кольце $\mathbb{Z}_n$.

Задача 2. Пусть R – коммутативное кольцо. Докажите, что

(a) нильпотент $\Rightarrow$ делитель нуля $\Rightarrow$ необратимый элемент;
(b) если $a \in R$ нильпотент, то ab нильпотент для любого $b \in R$;
(c) если $a, a' \in R$ нильпотенты, то $a + a'$ также нильпотент;
(d) если $a \in R$ нильпотент и $b \in R$ обратим, то $b + a$ обратим.

Задача 3. Докажите, что элемент a коммутативного кольца R обратим тогда и только тогда, когда a не лежит ни в каком собственном идеале кольца R.

Задача 4. Пусть R – коммутативное кольцо и $I \subseteq R$ – собственный идеал. Докажите, что факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда идеал I максимален.

Задача 5. Пусть k – поле и A – конечномерная не обязательно коммутативная алгебра над k без делителей нуля. Докажите, что

(a) все ненулевые элементы алгебры A обратимы;
(b) если $k = \mathbb{C}$, то $A = \mathbb{C}$.

Задача 6. Докажите, что все идеалы алгебры $k[x]$ главные, но в алгебре $k[x, y]$ есть неглавные идеалы.

Задача 7. Пусть k – поле и $\alpha \in k$. Докажите, что

$$k[x]/(x - \alpha) \cong k.$$

Задача 8. Пусть $x^2 + bx + c$ – квадратный трехчлен над $\mathbb{R}$ с дискриминантом D. Докажите, что факторалгебра

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + bx + c)$$

изоморфна

(a) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ при $D > 0$;
(b) $\mathbb{R}[\epsilon]$, где $\epsilon^2 = 0$, при $D = 0$;
(c) $\mathbb{C}$ при $D < 0$.