Конечномерные алгебры и действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-25 июля 2018 года

Задачи к занятию 2

Задача 1. Пусть V – конечномерное векторное пространство над произвольным полем и $P\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $P^2 = P$. Докажите, что в некотором базисе оператор P записывается диагональной матрицей с числами 0 или 1 на диагонали.

Задача 2. Пусть R – коммутативное кольцо без делителей нуля и QR – его поле частных. Предложим, что для любого $a \in QR$ либо $a \in R$, либо $a^{-1} \in R$. Верно ли, что R является полем?

Задача 3. Пусть R – алгебра непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0,1]$. С каждой точкой $x \in [0,1]$ свяжем подмножество $M_x = \{f \in R \,|\, f(x) = 0\}$. Докажите, что M_x – максимальный идеал в R, и все максимальные идеалы в R имеют такой вид.

Задача 4. Пусть A – конечномерная алгебра над бесконечным полем k. Докажите, что обратимые элементы в A образуют плотное открытое подмножество в классической топологии, если $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, или в топологии Зарисского для произвольного поля k.

Задача 5. Пусть $f(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \ldots (x-\lambda_k)^{s_k}$ – многочлен положительной степени. Докажите, что алгебра $k[x]/(f(x))$ конечномерна и ее разложение в прямую сумму локальных алгебр имеет вид

$$k[x]/(f(x)) = k[x]/((x-\lambda_1)^{s_1}) \oplus \ldots \oplus k[x]/((x-\lambda_k)^{s_k}).$$

Задача 6. Пусть $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ и $X \subseteq \mathbb{C}^n$ – множество общих нулей многочленов $f_1, \ldots, f_m$. Докажите, что если алгебра A конечномерна, то множество X конечно. Если Вы знаете теорему Гильберта о нулях, докажите обратное утверждение. Покажите, что число точек в X равно числу локальных слагаемых в разложении конечномерной алгебры A.