Конечномерные алгебры и действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-25 июля 2018 года

Задачи к занятию 3

Задача 1. Докажите, что для локальной алгебры A число $r_1 := \dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{m}^2$ равно наименьшему числу порождающих алгебры A.

Задача 2. Докажите, что последовательности Гильберта-Самюэля локальных алгебр $k[x,y]/(x^2,y^2)$ и $k[x,y]/(x^3,xy,y^2)$ совпадают, но первая алгебра горенштейнова, а вторая нет.

Задача 3. Докажите, что последовательности Гильберта-Самюэля локальных алгебр $k[x,y]/(x^4,xy,y^3)$ и $k[x,y]/(x^4,x^2y,y^2)$ совпадают и обе они не горенштейновы, но эти алгебры не изоморфны.

Задача 4. Докажите, что любая 4-мерная комплексная локальная алгебра изоморфна одной из следующих четырех алгебр

$$\mathbb{C}[x]/(x^4), \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2), \mathbb{C}[x,y]/(x^3,xy,y^2), \mathbb{C}[x,y,z]/(x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz)$$

и эти алгебры попарно не изоморфны.

Задача 5. С каждой диаграммой Юнга D, составленной из квадратов 1×1 и расположенной в положительном квадранте с вершиной в начале координат, можно связать конечномерную алгебру $A = k[x,y]/I$, где идеал I это линейная оболочка всех мономов x^iy^j, для которых точка (i,j) не лежит в диаграмме D. Докажите, что алгебра A локальна и найдите ее последовательность Гильберта-Самюэля. Для каких диаграмм D алгебра A горенштейнова?

Задача 6. Докажите, что межну группами $(\mathbb{C},+)$ и $(\mathbb{C}^\times,\times)$ нет нетривиальных полиномиальных гомоморфизмов. Постройте нетривиальный неполиномиальный гомоморфизм из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^\times$.

Задача 7. Опишите орбиты естественного действия на $\mathbb{P}^2$ для следующих матричных групп

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ t,s \in \mathbb{C}^\times \right\}, \quad G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{C} \right\}$$

и

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Задача 8. Пусть A – конечномерная алгебра. Покажите, что действие левыми умножениями определяет открытое эквивариантное вложение группы $A^\times/\{\lambda 1, \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$ в проективизацию $\mathbb{P}(A)$.