Конечномерные алгебры и действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-25 июля 2018 года

Задачи к занятию 4

Задача 1. Найдите все конечномерные локальные алгебры A, в которых

(a) каждый идеал является главным;
(b) содержится лишь конечное число главных идеалов.

Задача 2. Рассмотрим действие группы $(\mathbb{C}^n, +)$ на пространстве $\mathbb{P}^n$, отвечающее локальной алгебре A. Докажите, что орбиты этого действия находятся в естественном соответствии с ненулевыми главными идеалами алгебры A.

Задача 3. Докажите, что локальная конечномерная алгебра A горенштейнова тогда и только тогда, когда соответствующее ей действие группы $(\mathbb{C}^n, +)$ на пространстве $\mathbb{P}^n$ имеет единственную неподвижную точку.

Задача 4. Выпишите явно действие группы $(\mathbb{C}^n, +)$ на пространстве $\mathbb{P}^n$, соответствующее алгебре $\mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$. Опишите орбиты этого действия.

Задача 5. Выпишите явно действие группы $(\mathbb{C}^n, +)$ на пространстве $\mathbb{P}^n$, соответствующее алгебре $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(x_i x_j, 1 \leq i, j \leq n)$. Докажите, что соответствующее этой алгебре действие это единственное действие $(\mathbb{C}^n, +)$ на $\mathbb{P}^n$ с открытой орбитой, при котором дополнение до открытой орбиты состоит из неподвижных точек.

Задача 6. Выпишите явно действие с открытой орбитой группы $(\mathbb{C}^n, +)$ на квадрике $z_0^2 + \ldots + z_{n+1}^2 = 0$ в $\mathbb{P}^{n+1}$.

Задача 7. Пусть H – замкнутая коммутативная подгруппа группы $\mathrm{GL}(V)$, которая действует на пространстве V с открытой орбитой. Докажите, что группа H является максимальной по включению коммутативной подгруппой в $\mathrm{GL}(V)$.