Задачи по матрицам и многогранникам

Листок 1

Задача 1.

- Если $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Pe}_b$, то $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in \mathrm{Pe}_b$
- Пусть $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Тогда $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Pe}_b$ в том и только том случае, когда выполнена система неравенств

$$
\begin{gathered}
x_n \leqslant b_n; \\
x_{n-1} + x_n \leqslant b_{n-1} + b_n; \\
x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \leqslant b_{n-2} + b_{n-1} + b_n; \\
\cdots \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n;
\end{gathered}
$$

Задача 2. Дважды стохастические матрицы образуют выпуклое подмножество в $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Задача 3. Если в унитарной матрице заменить каждый элемент на квадрат его модуля, то получится дважды стохастическая матрица.

Задача 4.* Верно ли обратное: для любой дважды стохастической матрицы C существует унитарная U, такая что $c_{i,j} = |u_{i,j}|^2$? Аналогичный вопрос для ортогональных матриц вместо унитарных.

Задача 5. Докажите, что произведение двух дважды стохастических матриц является дважды стохастической матрицей.

Задача 6. Докажите теорему Биркгофа при $n = 2, 3$.

Задача 7.* Теорема Синкхорна. У матрицы разрешено за ход умножить любую строку или столбец на положительное число. Докажите, что из любой матрицы с положительными элементами можно такими операциями получить дважды стохастическую.

Задача 8. Если $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$ и $\tau a = (a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)}) \in \mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$ для некоторой транспозиции $\tau = (i, j)$. Тогда весь отрезок $[a, \tau a]$ лежит в $\mu(M_\lambda(\mathbb{C}))$.