# Задачи по матрицам и многогранникам

## Листок 2

**Задача 1.** Набор гиперграней $\mathcal{F}_{S_1}, \dots, \mathcal{F}_{S_k}$ имеет непустое пересечение в том и только том случае, когда подмножества $S_1, \dots, S_k \subset [n]$ можно переупорядочить так, чтобы они образовывали цепь

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k. \tag{1}$$

Пересечение $\mathcal{F}_{S_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{S_k}$ является гранью $\mathrm{Pe}^{n-1}$ размерности $n-1-k$.

**Задача 2.** Докажите, что пермутоэдр — простой многогранник.

**Задача 3.** Сопоставим гиперграни $\mathcal{F}_S$ цвет $c(\mathcal{F}_S) = |S| \in [n-1]$. Доказать, что такое сопоставление задает правильную раскраску гиперграней $\mathrm{Pe}^{n-1}$ в $n-1$ цветов. Иными словами, если две гиперграни пересекаются, то они покрашены в разные цвета.

**Задача 4.** Описать комбинаторно условие на два разбиения, при которых соответствующие грани $\mathrm{Pe}^{n-1}$ лежат одна в другой.

**Задача 5.** Докажите, что реберный граф $\mathrm{Pe}^{n-1}$ совпадает с графом Кэли группы $\Sigma_n$, если в качестве образующих взяты стандартные транспозиции $(1,2)$, $(2,3)$, …, $(n-1,n)$.

**Задача 6.** Докажите, что каждая грань пермутоэдра комбинаторно эквивалентна произведению пермутоэдров меньших размерностей. А именно, для разбиения $T = (T_1, \dots, T_k)$, грань $F_T$ комбинаторно эквивалентна $\mathrm{Pe}^{|T_1|-1} \times \dots \times \mathrm{Pe}^{|T_k|-1}$.

**Задача 7.** Найдите эйлерову характеристику трехмерного многообразия Томеи.