Задачи по матрицам и многогранникам

Листок 3

Задача 1. Докажите, что если у правильного шестиугольника параллельно отождествить противоположные стороны, то получится двумерный тор. Попробуйте доказать путем сведения этого пространства к квадрату с отождествленными противоположными сторонами.

Задача 2. Придумать дискретное множество точек в $\mathbb{R}^k$, для которого хотя бы одна клетка Вороного не является полиэдром.

Задача 3. Докажите, что каждая клетка Вороного кокомпактной решетки является выпуклым многогранником.

Задача 4. Докажите, что многогранником Дирихле–Вороного правильной симплициальной решетки в $\mathbb{R}^{n-1}$ является правильный пермутоэдр Pe^{n-1}.

Задача 5.* Докажите, что если пермутоэдр не является правильным, то его параллельными копиями невозможно замостить пространство (см. теорему Венкова о параллелоэдрах).

Задача 6. Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1}$ произвольный базис пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и $v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i$. Пусть $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — решетка, порожденная векторами $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Рассмотрим набор

$$\{w_i = v_i - v_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\},$$

и $\hat{N} \subset N$ — подрешетка, порожденная векторами w_i. Докажите, что $N/\hat{N} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 7. Докажите, что каждая клетка коразмерности s замечательного разбиения $\mathcal{WT}_{n-1}$ содержится в точности в $s+1$ различных максимальных клетках. (*) Докажите, что разбиение $\mathcal{WT}_{n-1}$ является регулярным. Докажите, что $\mathcal{WT}_{n-1}$ — минимальное по числу максимальных клеток разбиение с этими свойствами.

Задача 8. Группу $\mathbb{Z}_2^3$ можно рассматривать как подгруппу группы ортогональных матриц $O(3)$, состоящую из диагональных матриц с ± 1 на диагонали. Такая подгруппа действует на $O(3)$ как умножениями слева, так и умножениями справа. Докажите, что $F_3(\mathbb{R}) = O(3)/\mathbb{Z}_2^3$.

Задача 9. $F_3(\mathbb{R}) = S^3/Q_8$, где S^3 есть сфера единичных кватернионов, $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — группа кватернионов, и Q_8 действует на S^3 умножениями слева. В частности, $\pi_1(F_3(\mathbb{R})) = Q_8$.

Задача 10.* Докажите, что $\mathbb{Z}_2^3 \backslash O(3)/\mathbb{Z}_2^3 \cong S^3$.