Доказуемо рекурсивные функции

Задачи к курсу Л.Д. Беклемишева по материалу первых двух лекций

$\varphi_e(\vec{x})$ означает результат работы программы с номером e на входе $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из n натуральных чисел.

1. (Busy beaver) Пусть $\mathrm{BB}(n)$ означает максимальное число единиц, которое может напечатать машина Тьюринга в алфавите $\{0, 1, \sharp\}$ с $n+1$ состоянием, начав работу с ленты, заполненной только символами $\sharp$. Докажите, что для любой вычислимой тотальной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ имеет место $\mathrm{BB}(n) > f(n)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Рассмотрим частичную функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определяемую правилом
$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_n(n) = 0; \\ 0, & \text{если } \exists k\, (\varphi_n(n) = k \text{ и } k \neq 0); \\ \text{неопр.}, & \text{иначе.} \end{cases}$$
Доказать, что f вычислима, но не имеет тотального вычислимого продолжения.

3. (неразрешимость проблемы остановки) Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ называется разрешимым, если вычислима его характеристическая функция
$$\chi_P(\vec{n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{n} \in P; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
Вывести из предыдущей задачи, что существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, область определения которой не является разрешимой.

4. (перечислимые множества) Докажите, что непустое множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ является областью определения некоторой вычислимой функции тогда и только тогда, когда оно является областью значений некоторой тотальной вычислимой функции. Такие множества называются перечислимыми.

5. (неотделимая пара перечислимых множеств) Докажите, что существует пара непересекающихся перечислимых множеств A, B таких, что не существует разрешимого множества C, отделяющего A от B, то есть такого, что $A \subseteq C$ и $B \cap C = \varnothing$.

6. *Двоичным деревом* называем непустое подмножество T множества всех конечных двоичных последовательностей, для которого из $x \in T$ следует, что любое начало последовательности x также лежит в T. Докажите, что существует бесконечное разрешимое двоичное дерево T, не имеющее бесконечных вычислимых ветвей. (Подумайте, как следует определить понятие вычислимой ветви дерева.)

7. (как вообще такое может быть?) Пусть T — перечислимая, Σ_1-корректная теория в языке арифметики. Приведите пример программы e такой, что функция φ_e доказуемо рекурсивна в T, однако в T *не доказуемо* предложение $\forall x\, \exists y\, \varphi_e(x) = y$. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Гёделя о неполноте, то есть существованием истинных недоказуемых утверждений в T.

8. Определите функцию конкатенации двоичных слов Σ_1-формулой языка арифметики, не использующей функцию экспоненты. *Указание:* сначала выразите множество всех степеней двойки.