Σ_1-*определимость вычислимых функций*

21.07.2018

Теорема об определимости

Опр.

Множество $P \subseteq \mathbb{N}^k$ *Σ_1-определимо в $\mathbb{N}$*, если для некоторой $A(x_1, \ldots, x_k) \in \Sigma_1$

$$\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in P \iff \mathbb{N} \vDash A(n_1, \ldots, n_k).$$

Теорема.

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *вычислима* $\iff$ *множество* $\{\langle \vec{n}, m \rangle : f(\vec{n}) = m\}$ *Σ_1-определимо в* $\mathbb{N}$.

Доказательство теоремы о Σ_1-определимости

Идея: для каждой машины Тьюринга M надо выписать Σ_1-формулу $T_M(\vec{x})$ выражающую тот факт, что на входе, кодирующем $\vec{x}$, машина M завершает работу. Это достигается путём кодирования машин Тьюринга и описания их вычислений на арифметическом языке.

Δ_0-определения

$$
\begin{aligned}
x \neq y \quad &:\leftrightarrow \quad \neg\, x = y \\
x < y \quad &:\leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y \\
x \dot{-} y = z \quad &:\leftrightarrow \quad (y \leq x \wedge x = z + y) \vee (\neg\, y \leq x \wedge z = 0)
\end{aligned}
$$

Двоичное разложение

Любое $x > 0$ однозначно представляется в виде

$$x = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

где $a_0, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ и $a_n \neq 0$.
Обозначение: $|x| \rightleftharpoons n$.

Кодирование двоичных слов

Слово $a_{n-1} \ldots a_0$ кодируем числом $1a_{n-1} \ldots a_0$ в двоичной записи. Пустое слово Λ кодируется числом 1.

Замечание.
$|x|$ есть длина двоичной записи слова, кодируемого числом x.

$$
\begin{aligned}
String(x) \;&:\leftrightarrow\; x \neq 0 \\
|x| = y \;&:\leftrightarrow\; (x = 0 \wedge y = 0) \vee (2^y \leq x \wedge x < 2^{y+1}) \\
x * y = z \;&:\leftrightarrow\; z = x \cdot 2^{|y|} + (y \dot{-} 2^{|y|}) \\
&:\leftrightarrow\; \exists u \leq y\, (|y| = u \wedge z = x \cdot 2^u + (y \dot{-} 2^u))
\end{aligned}
$$

Кодирование алфавита Σ

Пусть $\Sigma = \{C_0, \dots, C_n\}$.
Возьмём c: $2^c \geq n+2$.
Положим $\ulcorner C_i \urcorner \rightleftharpoons 2^c + i$ для $0 \leq i \leq n$ и
$\ulcorner ; \urcorner \rightleftharpoons 2^c + n + 1$ (разделитель).

$$\begin{aligned} \Sigma(x) \quad &:\leftrightarrow \quad x = \ulcorner C_0 \urcorner \vee \dots \vee x = \ulcorner C_n \urcorner \\ \mathit{Byte}(x) \quad &:\leftrightarrow \quad \mathit{String}(x) \wedge |x| = c \end{aligned}$$

Слова в алфавите Σ

Слово = последовательность байтов

Σ-слово = последовательность байтов из Σ

$$
\begin{aligned}
\mathit{Word}(x) \quad &:\leftrightarrow \quad \mathit{String}(x) \wedge \exists k \leq x\ |x| = c \cdot k \\
\|x\| = y \quad &:\leftrightarrow \quad (\mathit{Word}(x) \wedge c \cdot y = |x|) \vee (\neg \mathit{Word}(x) \wedge y = 0) \\
x \subseteq_w y \quad &:\leftrightarrow \quad \mathit{Word}(x) \wedge \mathit{Word}(y) \wedge \\
&\qquad\quad \exists v, w \leq y\ (\mathit{Word}(v) \wedge y = v * x * w) \\
x \in_w y \quad &:\leftrightarrow \quad \mathit{Byte}(x) \wedge x \subseteq_w y \\
\mathit{Word}_\Sigma(x) \quad &:\leftrightarrow \quad \mathit{Word}(x) \wedge \forall y \leq x\ (y \in_w x \to \Sigma(y))
\end{aligned}
$$

Последовательности слов

Посл-ть $\langle w_1, \ldots, w_s \rangle$ Σ-слов кодируем словом $w_1; w_2; \ldots; w_s$, где $;$ — разделитель. Код пустой посл-ти $\langle\ \rangle$ есть 0.

Замечание.
Для любого $w \in \Sigma^*$, $\ulcorner \langle w \rangle \urcorner = \ulcorner w \urcorner$, в частности, $\ulcorner \langle \Lambda \rangle \urcorner = 1$.

$$
\begin{aligned}
Seq_{\Sigma}(x) \quad &:\leftrightarrow \quad Word(x) \wedge \forall y \in_w x \, (\Sigma(y) \vee y = \ulcorner ; \urcorner) \\
&\qquad \vee\, x = 0 \\
x; y = z \quad &:\leftrightarrow \quad (x = 0 \wedge z = y) \vee (y = 0 \wedge z = x) \vee \\
&\qquad (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = x * \ulcorner ; \urcorner * y) \\
x \subseteq_s y \quad &:\leftrightarrow \quad Seq_{\Sigma}(x) \wedge Seq_{\Sigma}(y) \wedge \\
&\qquad \exists u, v \leq y \, (Seq_{\Sigma}(u) \wedge Seq_{\Sigma}(v) \wedge y = u; x; v) \\
x \in_s y \quad &:\leftrightarrow \quad Word_{\Sigma}(x) \wedge x \subseteq_s y
\end{aligned}
$$

Кодирование Машин Тьюринга

$\Sigma(x)$ рабочий алфавит
$Q(x)$ алфавит состояний
$\Gamma(x) \rightleftharpoons Q(x) \vee \Sigma(x)$
$P(x)$ множество команд
$Word_{\Sigma}(x)$ слово в рабочем алфавите

Конфигурации

$$\begin{aligned} Config(z) \quad &:\leftrightarrow \quad Word_\Gamma(z) \wedge \exists u, v, q \leq z \\ &(Word_\Sigma(u) \wedge Word_\Sigma(v) \wedge Q(q) \wedge \\ &v \neq 1 \wedge z = u * q * v) \end{aligned}$$

(1 есть код пустого слова)

Переходы

$$
\begin{aligned}
&Step_M(x, y) :\leftrightarrow \\
&Config(x) \wedge Config(y) \wedge \\
&\exists u, v, p, q, a, b, c \subseteq_w x * y \\
&\quad [Word_\Sigma(u) \wedge Word_\Sigma(v) \wedge Q(p) \wedge Q(q) \wedge \Sigma(a) \wedge \Sigma(b) \wedge \Sigma(c) \wedge \\
&\qquad [(x = u * p * a * v \wedge y = u * q * b * v \wedge P(p * a * q * b * \ulcorner N \urcorner)) \\
&\qquad \vee (x = u * c * p * a * v \wedge y = u * q * c * b * v \wedge P(p * a * q * b * \ulcorner L \urcorner)) \\
&\qquad \vee (x = p * a * v \wedge y = q * \ulcorner \# \urcorner * b * v \wedge P(p * a * q * b * \ulcorner L \urcorner)) \\
&\qquad \vee (x = u * p * a * v \wedge v \neq 1 \wedge y = u * b * q * v \wedge P(p * a * q * b * \ulcorner R \urcorner)) \\
&\qquad \vee (x = u * p * a \wedge y = u * b * q * \ulcorner \# \urcorner \wedge P(p * a * q * b * \ulcorner R \urcorner)) \\
&\qquad] \\
&\quad]
\end{aligned}
$$

Вычисления

$$
\begin{aligned}
Init_M(x,z) \quad &:\leftrightarrow \quad Config(z) \wedge z = \ulcorner q_1 \urcorner * x \\
Stop_M(z) \quad &:\leftrightarrow \quad Config(z) \wedge \exists u, v \subseteq_w z\, (z = u * q_0 * v) \\
Comp_M(x,z) \quad &:\leftrightarrow \quad Seq_\Gamma(z) \wedge \exists v \in_s z\ Stop_M(v) \wedge \forall u, v, w \leq z \\
&\qquad (z = u; v; w \wedge Word_\Gamma(v) \rightarrow \\
&\qquad\qquad (Init_M(x,v) \vee \exists y \in_s u\ Step_M(y,v)))
\end{aligned}
$$

Кодирование входа

Пусть Σ содержит $1, \$$.

$code(n) \rightleftharpoons 1 \ldots 1$ ($n + 1$ раз)

$$\begin{aligned} code(x) = y \quad :\leftrightarrow \quad & Word(y) \wedge \|y\| = x + 1 \wedge \\ & \forall y {\in_w} x \; y = \ulcorner 1 \urcorner \end{aligned}$$

Предикат остановки

$T_M(a_1, \ldots, a_k) :\leftrightarrow$
$\exists z\ Comp_M(code(a_1)\$\ldots\$code(a_k), z)$

Имеем:

$\mathbb{N} \vDash T_M(n_1, \ldots, n_k) \iff \varphi_M(n_1, \ldots, n_k)$ определена.