

Задача 1. Рассмотрим кольцо вычетов (на самом деле, поле) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{11}$. Напишите таблицы сложения и умножения в этом кольце и **только** с помощью этих таблиц ответьте на следующие вопросы:

- Что в \mathbb{F} является аналогом выражений -4 , $3/4$, $-2/7$, $\sqrt{-8}$ (и почему).
- Проиллюстрируйте, на примере, свойство $(-1) \cdot a = -a$.
- Докажите что и в общем случае для любого кольца R с единицей 1_R , $(-1_R) \cdot a = -a$.
- Решите в \mathbb{F} уравнение $2x + 3 = 8$ (используя только аксиомы кольца и таблицы которые вы построили).
- Решите в \mathbb{F} уравнение $x^2 + 6x + 3 = 10$ методом выделения полного квадрата. Проверьте.
- Теперь решите это же уравнение $x^2 + 6x + 3 = 10$ в \mathbb{F} с помощью формулы решения квадратного уравнения.
- С помощью стандартного дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ классифицируйте уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по числу возможных корней в \mathbb{F} .
- Не решая уравнения $8x^2 + 9x + 3 = 0$, определите сколько у него есть корней в \mathbb{F} .

Задача 2. Рассмотрим кольцо вычетов \mathbb{Z}_{12} . Таблицы сложения и умножения в этом кольце даны ниже:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

- Что такое делитель нуля? Перечислите все делители нуля в \mathbb{Z}_{12} .
- (*) Что такое обратимый элемент (по умножению)? Перечислите все обратимые элементы в \mathbb{Z}_{12} . Покажите что они образуют группу, она обозначается $U(12)$. Напишите таблицу Кэли и нарисуйте диаграмму Кэли для этой группы. Какой стандартной группе изоморфна $U(12)$? Постройте этот изоморфизм явно.
- Покажите что подмножество $A = \{0, 3, 6, 9\}$ является идеалом \mathbb{Z}_{12} . Является ли этот идеал главным?
- Напишите таблицы сложения и умножения для A . Есть ли в этом кольце единица? Является ли A областью целостности? Полем?
- Какому стандартному кольцу изоморфно A ? Постройте этот изоморфизм явно.
- Найдите, подстановкой, все корни $p(x) = x^2 + 5x + 6$ в \mathbb{Z}_{12} . Почему этих корней больше 2? Как их можно найти с помощью вычисления (т.е., не подстановкой)?

Задача 3. С помощью алгоритма Евклида найдите обратный элемент для $16 \in \mathbb{Z}_{37}$.